1 Rappels sur la loi normale

Le théorème Central Limite nous informe sur le rôle essentiel de la loi normale en théorie statistique. Ce chapitre a pour but de (re)voir certaines propriétés et lois issues de la loi normale, à cause de leur importance en statistique.

Nous savons que si $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, alors

$$aX + b \sim N\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$$

$(a \neq 0)$ et que si $X_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, $X_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ et X_1, X_2 sont indépendantes, alors

$$X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$$

(ceci est-il vrai si X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes ?).

On généralise à plusieurs variables.

Théorème 1 *Soit $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes et telles que $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$. Alors la variable*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b \sim N\left(\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b, \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

(on suppose $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$).

Preuve. *Utilisons les FGM. Nous savons que si $V \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, alors*

$$M_V(t) = \exp\left(\mu t + t^2\sigma^2/2\right)$$

Maintenant,

$$M_Y(t) = E\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) t\right) = E\left(e^{bt} \prod_{i=1}^{n} e^{a_i X_i t}\right) \overset{ind.}{=} e^{bt} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$$

$$= e^{bt} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(a_i \mu_i t + a_i^2 t^2 \sigma_i^2/2\right) = \exp\left(t\left(b + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i\right) + t^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2/2\right)$$

On reconnaît la FGM d'une variable $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. ■

Corollaire 1 *Si $X_1, \cdots, X_n$ sont iid$\sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, alors*

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$$

Rappelons aussi le résultat suivant.

Théorème 2 *Soit $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes et telles que $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$. Soit les variables normales*

$$U = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

et

$$V = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$$

Alors

1. $$Cov(U, V) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sigma_i^2$$

2. *U et V sont <u>indépendantes si et seulement si</u>*

$$Cov(U, V) = 0$$

1.1 Exercices

Exercice 1 *Soit* $X_1 \sim N\left(\mu = 3, \sigma^2 = 5\right)$ *et* $X_2 \sim N\left(\mu = -7, \sigma^2 = 2\right)$*, indépendantes.*

1. *Quelle est la loi de* $U = 4X_1 - X_2/3$ *?*
2. *Calculer* $Cov\,(U, V)$ *où* $V = X_1$*.*

Exercice 2 *Soit* $X \sim N\,(0,1)$ *et* Y *telle que* $P\,(Y = \pm 1) = 1/2$*. On supposera* X *et* Y *indépendantes et posons* $V = XY$*.*

1. *Vérifier que* $V \sim N\,(0,1)$*.*
2. *Vérifier que* $Cov\,(X, V) = 0$*.*
3. *Vérifier que* X *et* V *sont indépendantes.*
4. *Ce résultat contredit-il le théorème 2 ?*

2 Loi du Khi-carré, loi de Student et loi F

Les lois présentées ici ne servent en général pas comme modèles de phénomènes qu'ont veut décrire/simuler. Leur importance est dûe au fait qu'elles interviennent dans l'analyse des intervalles de confiance et des tests d'hypothèses.

2.1 Loi du Khi-carré

Soit $Z \sim N\,(0,1)$. Alors la variable aléatoire $Y = Z^2$ suit une loi du Khi-carré à un degré de liberté : $Y \sim \chi_1^2$.

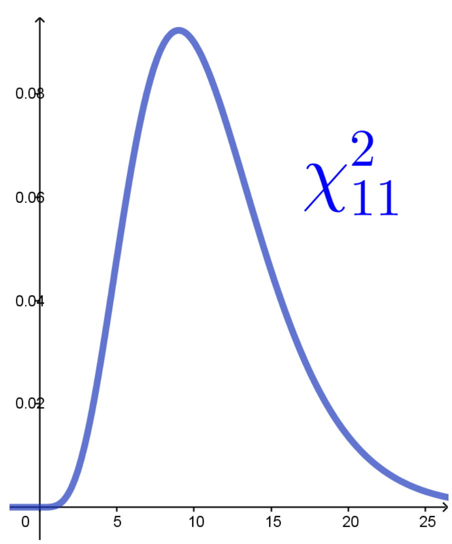
On peut faire les observations suivantes.

1. La fonction de densité de Y est

$$f_Y\,(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2}, \qquad y \geq 0$$

En effet, la fonction de répartition de Y est

$$\begin{aligned} F_Y\,(y) &= P\left(Z^2 \leq y\right) = P\left(-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}\right) \qquad (y \geq 0) \\ &= \Phi\left(\sqrt{y}\right) - \Phi\left(-\sqrt{y}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{y}\right) - 1 \\ &\Rightarrow f_Y\,(y) = \frac{2}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\sqrt{y}\right)^2/2} = \textit{résultat} \end{aligned}$$



2. C'est donc un cas particulier de la distribution gamma : $\chi_1^2 = Gamma\left(\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right)$
3. Sa FGM est
$$M(t) = (1-2t)^{-1/2}$$
4. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ et $Y = Z^2 \sim \chi_1^2$
5. Si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont iid χ_1^2 alors $V = Y_1 + \ldots + Y_n \sim \chi_n^2 = Gamma\left(\alpha = \frac{n}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right)$. De plus,
$$\begin{aligned}
&E(V) = n \\
&VAR(V) = 2n \\
&M_V(t) = (1-2t)^{-n/2} \\
&f_V(v) = \tfrac{v^{(n/2)-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-v/2}, \quad v \geq 0 \\
&E\left(V^k\right) = \frac{2^k \Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad k \geq 0
\end{aligned}$$
En particulier, si $n = 2$, $V \sim Exp(\lambda = 1/2)$.
6. Si $V \sim \chi_n^2$ et $W \sim \chi_m^2$ sont indépendantes, alors $V + W \sim \chi_{n+m}^2$.
7. Commandes R : pchisq(x,n) $\left(= P\left(\chi_n^2 \leq x\right)\right)$, dchisq(x,n) $\left(= f\left(\chi_n^2 = x\right)\right)$, qchisq(x,n).

Exemple 1 *Les commandes R suivantes permettent d'imprimer une table typique des quantiles du Khi carré pour les probabilités* $0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.9, 0.95, 0.975, 0.99$ *pour les degrés de liberté* $n = 1, \ldots, 30$ *:*

```
n <- 1 :30 ; p <- c(.01,.025,.05,.1,.9,.95,.975,.99) ;
for(r in n) {print(c(r, round(qchisq(p,r),digits = 3)))}
```

2.1.1 Exercices

Exercice 3 *Avec les hypothèses ci-dessus (propriété 6), est-il vrai que* $V - W \sim \chi_{n-m}^2$ *?*

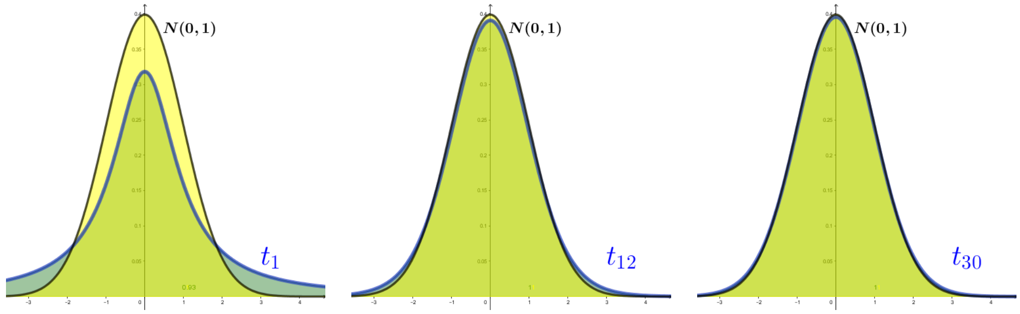
Rappel. Si $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$, alors
$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{\lambda (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0,\, \alpha, \lambda > 0 \\
M_X(t) &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha} = (1 - t/\lambda)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

Exercice 4 *Si* $X \sim Gamma(n, \lambda)$*, quelle est la loi de* $Y = 2\lambda X$ *?*

Exercice 5 *Quelle serait, selon vous, une bonne définition d'une loi du Khi carré à zéro degré de liberté ? Indication. Voir la FGM.*

2.2 Loi de Student

Définition 1 *Soit donné deux variables aléatoires indépendantes* $Z \sim N(0,1)$ *et* $U \sim \chi_n^2$*. Alors la variable*
$$T = Z/\sqrt{U/n}$$
suit une loi de Student (ou loi t) à n *degrés de liberté. On écrit*
$$T \sim t_n$$
La densité de T *est donnée par*
$$f(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$



Propriétés

1. $f(-t) = f(t)$ (fonction paire : graphe symétrique par rapport à l'axe des y). Pour les petites valeurs de n, la 'queue' de la densité descend lentement vers l'axe des x (contrairement par exemple à celle de $N(0,1)$ qui contient l'essentiel de la probabilité au bout de 3 unités).
2. $E(T) = 0$ $(n \geq 2)$, $VAR(T) = \frac{n}{n-2}$ $(n > 2)$.
3. Si $n \uparrow \infty$, la distribution se stabilise $(N(0,1))$ (convergence en loi).
4. Si $n = 1$, $T \sim Cauchy$. Pas de moyenne ni de variance.
5. Commandes R : dt(x,n), pt(x,n), qt(q,n).

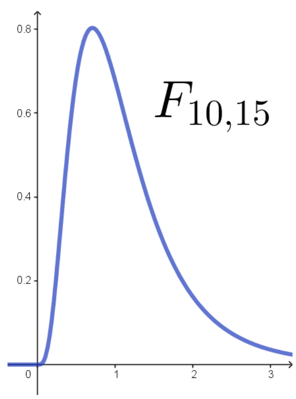
2.3 Loi F (Fisher-Snedecor)

Définition 2 *Soit donné deux variables aléatoires indépendantes* $U \sim \chi^2_m$ *et* $V \sim \chi^2_n$. *Alors la variable*

$$W = \frac{U/m}{V/n} \sim F_{m,n}$$

(loi de Fisher à m *et* n *degrés de liberté). La densité de* W *est donnée par*

$$f(w) = \frac{\Gamma((m+n)/2)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} w^{m/2-1} \left(1 + \frac{m}{n} w\right)^{-(m+n)/2}, \qquad w > 0$$



Propriétés

1. $E(W) = \dfrac{n}{n-2}$ $(n > 2)$, $VAR(W) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ $(n > 4)$.
2. Si $W \sim F_{m,n}$ alors $1/W \sim F_{n,m}$.
3. Si $T \sim t_n$ alors $T^2 \sim F_{1,n}$.
4. Si $W \sim F_{m,n}$ alors $mW \overset{Loi}{\rightarrow} \chi^2_m$ (quand $n \rightarrow \infty$).
5. Soit $X_1, \ldots, X_n iid \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ et $Y_1, \ldots, Y_m iid \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$ telles que les X_i soient indépendants de Y_j, alors
$$F = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} \sim F_{n-1,m-1}$$
6. Commandes R : df(x,m, n), pf(x,m, n), qf(q,m, n).

3 Lois de $\overline{X}$ et S^2

Soit $X_1, \ldots, X_n$ iid $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. On définit la moyenne et la variance empiriques (échantillonnales)

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

Un petit calcul montre que

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\left(X_i - \overline{X}\right)^2 &= X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2X_i\overline{X} + \sum_{i=1}^{n}\overline{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\overline{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2 \\
&\Rightarrow \textit{résultat}
\end{aligned}$$

On a les résultats importants suivants.

Théorème 3 *Avec les hypothèses et notations ci-dessus,*

1. $\overline{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$
2. $E\left(S^2\right) = \sigma^2$
3. $VAR\left(S^2\right) = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right)$ *où* $\mu_4 = E\left(X^4\right)$

Preuve.

1. *Évident.*
2. $$\begin{aligned}
E\left(S^2\right) &= \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \frac{n}{n-1}E\left(\overline{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i^2\right) - \frac{n}{n-1}E\left(\overline{X}^2\right) = \frac{n}{n-1}E\left(X_1^2\right) - \frac{n}{n-1}\left(\mu^2 + \sigma^2/n\right) \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\mu^2 + \sigma^2\right) - \frac{n}{n-1}\left(\mu^2 + \sigma^2/n\right) = \frac{n}{n-1}\left(\mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 - \sigma^2/n\right) \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\sigma^2 - \sigma^2/n\right) = \sigma^2
\end{aligned}$$
3. *Omise.*

■

Théorème 4 *Avec les hypothèses ci-dessus, on a*

1. $\overline{X}$ *et* $X_i - \overline{X}$ *sont indépendantes,* $i = 1, \ldots n$ *(résultat non intuitif).*
2. $\overline{X}$ *et* S^2 *sont indépendantes.*
3. $(n-1)\, S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$.
4. $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.

Preuve.

1. *Utilise la MGF conjointe (cf Rice ou remarque plus bas pour une approche directe).*
2. *Conséquence de 1. Mais donnons une preuve dans le cas* $n = 2$. *On a*

$$X_i - \mu = \left(X_i - \overline{X}\right) + \left(\overline{X} - \mu\right) \Rightarrow \sigma^2 S^2 = \frac{1}{2-1} \sum_{i=1}^{2} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$
$$= \left(X_1 - \frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{2}(X_1 - X_2)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(X_2 - X_1)\right)^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$$
$$\Rightarrow \frac{S^2}{(2-1)\,\sigma^2} = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2\sigma^2} = \left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2$$

Maintenant,

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0,1) \Rightarrow \frac{S^2}{(2-1)\,\sigma^2} = \left(\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_1$$

Par ailleurs, il est facile de voir (exercice) que

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{\sigma} \ \text{ et } Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{\sigma}$$

sont indépendantes. Puisque

$$\overline{X} = \frac{\sigma}{2} Y_1$$

ne dépend que de Y_1 *et*

$$S^2 = \frac{\sigma^2}{2} Y_2$$

ne dépend que de Y_2*, alors* $\overline{X}$ *et* S^2 *sont indépendantes.*

3. *On utilise l'égalité*

$$X_i - \mu = \left(X_i - \overline{X}\right) + \left(\overline{X} - \mu\right)$$

Alors (petit calcul)

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$$

Le reste suit par une utilisation des FGM (voir exercice 3 ci-dessus).

4. *On a*

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}{\sqrt{S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}}} \overset{ind+déf}{\sim} t_{n-1}$$

■

Remarque 1 *La propriété 4 peut servir à la construction d'un intervalle de confiance pour une moyenne de variable* $X_1, \ldots, X_n iid \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, μ *et* σ^2 *inconnus. En effet, soit* $\alpha \in]0;1[$ *donné et soit* $t_{n-1,\alpha/2}$ *le nombre positif défini par*

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(-t_{n-1,\alpha/2} \leq T \leq t_{n-1,\alpha/2}\right) = P\left(-t_{n-1,\alpha/2} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,\alpha/2}\right) \\ &= P\left(\overline{X} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Remarque 2 ***Intervalle de prédiction****. Soit* $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ *iid* $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, μ, σ^2 *inconnus. On observe* $X_1, \ldots, X_n$ *et on utilise cette information pour prédire* X_{n+1}*. Puisque* μ *est inconnu, on utilisera (prédicteur naturel de* X_{n+1}*)*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Rappelons que $\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ *et que* X_{n+1} *est indépendant de* $\overline{X}_n$*. Par conséquent,*

$$\begin{aligned} & X_{n+1} - \overline{X}_n \sim N\left(0, \sigma^2\left(1+1/n\right)\right) \\ & \qquad \Rightarrow Z = \frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{\sigma\sqrt{1+1/n}} \sim N(0,1) \\ & \qquad \Rightarrow T = \frac{X_{n+1}-\overline{X}_n}{S_n\sqrt{1+1/n}} \sim t_{n-1} \\ & \qquad \Rightarrow P\left(-t_{\alpha/2,n-1} < T < t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha \\ & \qquad \Rightarrow \boxed{P\left(\overline{X}_n - t_{\alpha/2,n-1}S_n\sqrt{1+1/n} < X_{n+1} < \overline{X}_n + t_{\alpha/2,n-1}S_n\sqrt{1+1/n}\right) = 1-\alpha} \\ & \qquad IP_{1-\alpha} \end{aligned}$$

Remarque 3 **La propriété 1 peut être démontrée directement en utilisant une certaine transformation orthogonale dite transformation de Helmert. Posons*

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(X_1 - X_2\right) \\ Y_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(X_1 + X_2 - 2X_3\right) \\ &\vdots \\ Y_n &= \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} - (n-1)X_n\right) \end{aligned}$$

ou les X_i *sont iid* $N\left(\mu, \sigma^2\right)$*. La matrice de cette transformation linéaire est donc*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} & \cdots & \frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}} \end{bmatrix}$$

On a ainsi

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$$

où

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Puisque la matrice A est orthogonale (exercice !), son inverse est égal à sa transposée. On en déduit

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mathbf{X}^t\mathbf{X} = \mathbf{X}^t A^t A\mathbf{X} = \mathbf{Y}^t\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

Géométriquement, cela signifie qu'une hypersphère (sphère dans $\mathbb{R}^n$) dans le repère des x_i reste une sphère dans le repère des y_i quand on lui imprime une rotation orthogonale. Le jacobien de cette transformation est la matrice $J = A^t$ avec $|J| = 1$. Maintenant, la densité conjointe des X_i est donnée par

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2\right)\right]$$

On en déduit (formule de transformation) la densité conjointe des Y_i :

$$\begin{aligned} g(y_1, \cdots, y_n) &= f(x_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, x_n(y_1, \cdots, y_n))\,|J| \\ &= \left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\mu\sqrt{n}y_1 + n\mu^2\right)\right] \\ &= \left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=2}^{n} y_i^2 + \left(y_1 - \sqrt{n}\mu\right)^2\right)\right] \end{aligned}$$

On voit que les Y_i sont indépendantes. De plus, $Y_1 \sim N\left(\sqrt{n}\mu, \sigma^2\right)$ tandis que $Y_2, \cdots, Y_n \sim N\left(0, \sigma^2\right)$. A partir de ceci, la propriété 1 est immédiate (exercice).