Contenu

1 Expérience aléatoire. Évènements

1.1 Ensemble fondamental

Définition 1 Expérience aléatoire. *Expérience (réelle ou conceptuelle) dans laquelle on ne peut pas prévoir le résultat d'avance. Il dépend du "hasard".*

Exemple 1 *Lancer un dé, tirer une carte d'un jeu de cartes, lancer une pièce de monnaie, durée de vie d'un équipement, effet d'un traitement expérimental sur un cobaye, niveau d'acceptation d'un nouveau produit sur le marché, etc. sont des expériences aléatoires.*

Remarque 1 *Une expérience aléatoire est également appelée* épreuve *ou essai.*

La première étape, quand on considère une expérience aléatoire, est de construire un ensemble Ω, appelé *ensemble fondamental* (sample space) de l'expérience, de sorte que les résultats de l'expérience correspondent de manière bijective aux éléments de l'ensemble : chaque résultat de l'expérience correspond à un seul élément de l'ensemble Ω et vice-versa.

Définition 2 Ensemble fondamental. *L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire est appelé ensemble fondamental (ou ensemble échantillon) et est noté Ω (ou S dans certains ouvrages de statistique). Ces résultats sont appelés* évènements élémentaires.

Exemple 2 *Si on lance une pièce de monnaie une fois, les résultats possibles de cette expérience sont "Pile" (noté P) ou "Face" (noté F) :*

$$\Omega_1 = \{P, F\}.$$

Si on lance notre pièce deux fois de suite (ou si on lance deux pièces distinctes), alors on a 4 résultats possibles :

$$\Omega_2 = \{PP, PF, FP, FF\}.$$

On remarquera que $\Omega_2 = \Omega_1 \times \Omega_1$ (produit cartésien). Plus généralement, si on lance notre pièce n fois, alors l'ensemble fondamental est donné par :

$$\Omega_n = \{\underbrace{PPP\dots P}_{n \text{ facteurs}}, \underbrace{PPP\dots PF}_{n \text{ facteurs}}, \dots, \underbrace{FFF\dots F}_{n \text{ facteurs}}\} = \Omega_1^n.$$

Notons que Ω_n contient 2^n éléments. On écrit $|\Omega_n| = 2^n$.

Exemple 3 *Considérons l'expérience qui consiste à lancer un dé une fois et à noter le résultat. On peut prendre pour ensemble fondamental*

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Cependant, si on ne cherche à savoir que si la face qui sort est un nombre pair ou impair, on peut prendre pour ensemble fondamental

$$\Omega_2 = \{pair,\ impair\}.$$

Exemple 4 *Un jeu de cartes consiste en* 52 *cartes divisées en* 4 *"couleurs" : pique, coeur, carreau et trèfle, de* 13 *cartes chacune. Les cartes de chaque couleur sont numérotées de* 1 *(as) à* 10*, plus un Valet, une Dame et un Roi. Si on tire une carte au hasard, on a une expérience aléatoire. Numérotons les cartes de* 1 *à* 52*. Un ensemble fondamental pour cette expérience est un ensemble de* 52 *éléments :*

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, ..., 52\}.$$

On peut aussi prendre l'ensemble (il n'indique que la couleur tirée) suivant :

$$\Omega_2 = \{\textit{pique, coeur, carreau, trèfle}\}.$$

Ainsi, **le choix d'un ensemble fondamental n'est en général pas unique**. Il dépend du type de résultats qui nous intéressent.

Exemple 5 Tirage avec remise, tirage sans remise. *Une urne contient* 3 *boules rouges et* 5 *boules blanches. Décrire un ensemble fondamental si on tire deux boules*

1. avec remise *(la première boule tirée est remise dans l'urne avant le tirage de la seconde boule).*

2. sans remise *(la première boule tirée nest pas remise dans l'urne).*

Solution *Une manière de décrire les résultats d'un tirage de deux boules de l'urne est de noter les couleurs des boules au fur et à mesure quelles sont tirées. Un ensemble fondamental possible est*

$$\Omega = \{(R, R), (R, B), ((B, R), (B, B)\}.$$

*Cet ensemble ne tient pas compte du nombre de boules dans l'urne ni du type de tirage (*échantillonnage*) qu'on effectue.*

On peut obtenir des ensembles plus instructifs si on considère les 8 *boules comme* 8 *objets discernables. En tirant* 2 *boules avec remise, on a* 8 *choix pour la première boule et* 8 *choix pour la seconde boule, de manière que chaque résultat de l'expérience peut être représenté par un couple* (b_1, b_2) *où* $b_1 =$ *résultat du premier tirage et* $b_2 =$ *résultat du second tirage. Pour la première question, on a donc l'ensemble fondamental*

$$\Omega_1 = \{(b_1, b_2) : b_1, b_2 \in B\} = B \times B = B^2,$$

où B *est l'ensemble des* 8 *boules. Notons que* Ω_1 *contient* $|\Omega_1| = 8 \times 8 = 64$ *éléments.*

Pour la seconde question, on a

$$\Omega_2 = \{(b_1, b_2) : b_1, b_2 \in B, b_1 \neq b_2\}.$$

On a $|\Omega_2| = (8)_2 = 8 \cdot 7 = 56.$

Remarque 2 *Nous avons considéré que l'échantillonnage sans remise se fait séquentiellement en deux étapes, élément par élément. On peut tout aussi bien considérer que ce type d'échantillonnage se fait d'un coup. Dans ce cas, l'ensemble fondamental est différent : au lieu d'avoir des couples (des arrangements)* (b_1, b_2)*, on a plutôt des sous ensembles (ou des combinaisons)* $\{b_1, b_2\}$*. De même, dans le cas avec remise, on peut ne pas tenir compte de l'ordre dans lequel les boules sont tirées, mais seulement de leur couleur.*

Il est faux de croire qu'un ensemble fondamental est toujours fini. En effet, il est facile d'imaginer des expériences aléatoires dont l'ensemble fondamental est infini.

Exemple 6 *La durée de vie d'un équipement (ampoule électrique, batterie de voiture,etc...) est une expérience aléatoire. On peut prendre* $\Omega = [0, +\infty[$*, puisque chaque nombre positif est, a priori, une durée de vie potentielle : aucune expérience ne peut contredire ce constat.*

Exemple 7 *On lance une pièce de monnaie autant de fois qu'il faut pour obtenir pile (P), après quoi on arrête. Un peu de réflexion montre que "Pile" peut être obtenu dès le premier jet, ou au deuxième jet après un face, ou au troisième jet après deux faces, etc. Ainsi, un ensemble fondamental pour cette expérience est :*

$$\Omega = \{P, FP, FFP, FFFP, \ldots, FFFF \cdots FP, \ldots\}.$$

Cet ensemble est infini. Plus précisément, il est infini dénombrable, en ce sens qu'on peut énumérer ses éléments (on peut les mettre en bijection avec l'"ensemble des entiers naturels).

Définition 3 *Un ensemble fondamental dénombrable (fini ou infini) est dit* <u>discret</u>.

1.2 Évènement

Une fois un ensemble fondamental défini, on introduit les évènements (liés à l'expérience aléatoire).

Définition 4 *Un* évènement *est un sous-ensemble de l'ensemble fondamental. Il est généralement noté par une lettre capitale : $A, B, \ldots$.*

Exemple 8 *Lançons un dé une fois et prenons $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alors les ensembles suivants sont des évènements :*

- *E = "obtenir un nombre pair" = $\{2, 4, 6\}$.*
- *F = "obtenir un nombre impair" = $\{1, 3, 5\}$.*
- *G = "obtenir un nombre premier" = $\{2, 3, 5\}$.*
- *H = obtenir un multiple de 3 = $\{3, 6\}$, etc.*

Il y a un total de $2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$ évènements associés à cette expérience.

Exemple 9 *Lançons deux dés. Voici un ensemble fondamental lié à cette expérience :*

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 6\}$$

Il contient $|\Omega| = 6^2 = 36$ éléments. On peut considérer toutes sortes d'évènements liés à cette expérience (il y en a $2^{36} = 68\,719\,476\,736$). Par exemple :

- *A = "la somme des deux faces est égale à 10" :*

$$A = \{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\}$$

- *B = "les deux faces sont paires" :*

$$B = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

etc.

Rappelons qu'un évènement élémentaire est un singleton (un ensemble constitué d'un seul élément de Ω). Un évènement n'est donc rien d'autre qu'une union d'évènement élémentaires. Si l'ensemble Ω n'est pas "trop gros" (s'il est discret) il est pertinent de dire qu'un évènement se réalise si et seulement si l'un des évènements élémentaires qui le composent se réalise.

Exemple 10 *E = "Obtenir 2 en lançant un dé" est un évènement élémentaire. Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on voit que $E = \{2\}$. Cependant, F = "Obtenir un nombre pair" =$\{2, 4, 6\}$ est constitué de trois évènements élémentaires : $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$. Chacun de ces trois évènements réalise F.*

Exemple 11 *A = "Obtenir deux pile en lançant une pièce de monnaie deux fois" est un évènement élémentaire. Si on prend $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$, on voit que $A = \{FF\}$. Ici, F = "face" et P = "pile".*

Exemple 12 *Supposons que le lancer d'un dé conduit au résultat "on obtient 1". Alors l'évènement $A = \{1, 3, 5\}$ = "obtenir un nombre impair" est réalisé.*

On distingue deux évènements particuliers importants.
- *L'évènement certain* : C'est l'ensemble fondamental Ω. Dans le cas où il est discret, tous les évènements élémentaires réalisent Ω. D'où l'appellation "évènement certain".

Exemple 13 *"Obtenir un nombre positif" dans le jet d'un dé est un évènement certain. Il correspond évidemment à* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- *L'évènement impossible* : Cet évènement n'est jamais réalisé. En termes d'ensembles, on l'identifie avec l'ensemble vide $\emptyset$, du moins dans le cas où Ω est discret.

Exemple 14 *Obtenir un nombre négatif en lançant un dé est un évènement impossible.*

Exemple 15 *On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtention de "Pile". Dans la plupart des modèles, l'évènement "On n'obtient jamais Pile" est impossible et, à contrario, l'évènement "Pile sortira tôt ou tard" est certain.*

1.2.1 Exercice

Exercice 1 *Si on considère un ensemble* Ω *très gros (non discret), par exemple* $\Omega = [0; \infty[$ *(durée de survie d'un équipement), quels sont les évènements élémentaires ? Quelle probabilité attribuer à chaque évènement élémentaire ? Comment décrire l'évènement* $E =$ *"L'équipement fonctionne à l'instant* t*" (où* t *est un nombre positif donné) à l'aide d'évènements élémentaires ? Peut-on dire que* E *se réalise si l'un des évènements élémentaires qui le composent se réalise ? Comment attribuer une probabilité à* E *?*

1.3 Opérations sur les évènements

Soit une expérience aléatoire et Ω l'ensemble fondamental associé. Soient A et B deux évènements ($A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$). Il est naturel de considérer que les ensembles obtenus à partir des opérations ensemblistes usuelles (union, intersection, complémentation, etc.) sur A et B produisent des évènements. Ainsi :
- $A \cup B$: est réalisé si A est réalisé ou B est réalisé (le ou est inclusif).
- Plus généralement, si $A_1, A_2, \ldots$ sont des évènements,

$$\cup_{n \geq 1} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$$

  est l'évènement "au moins un des A_n se réalise".
- $A \cap B$ ou AB : est réalisé si A et B sont simultanément réalisés.
- Plus généralement, si $A_1, A_2, \ldots$ sont des évènements,

$$\cap_{n \geq 1} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots$$

  est l'évènement "tous les A_n se réalisent".
- $\overline{A} = A^c$ (complémentaire de A dans Ω ou non$A$) est l'évènement "A ne se réalise pas".
- $A \Rightarrow B$: La réalisation de A <u>entraîne</u> celle de B. En d'autres termes $A \subset B$ (du moins dans le cas discret).
- $A \Leftrightarrow B$: Réalisation simultanée de A et de B. En d'autres termes $A = B$ (du moins dans le cas discret).
- $A \setminus B$: L'évènement A est réalisé mais pas l'évènement B. Autre notation : $A \cap \overline{B}$ ou $A\overline{B}$.

Exemple 16 *On lance un dé une fois. Soit* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *et considérons les évènements* $A =$ *"obtenir un nombre pair"* $= \{2, 4, 6\}$, $B =$ *"obtenir un nombre impair"* $= \overline{A}$, $C =$ *"obtenir un nombre premier"* $= \{2, 3, 5\}$. *Alors* $A \cup B = \Omega$ *est l'évènement certain,* $AC =$ *"obtenir un nombre à la fois pair et premier"* $= \{2\}$.

<u>Terminologie</u> : On dit que deux évènements sont <u>*incompatibles*</u> (ou mutuellement exclusifs) si, quand l'un se réalise, l'autre ne peut pas se réaliser. En tant qu'ensembles, deux évènements disjoints sont incompatibles.

1.3.1 Exercices

Exercice 2 *L'ensemble vide $\emptyset$ est disjoint de tout autre ensemble (y compris de lui-même !). Il est donc, au sens de la terminologie ci-dessus, incompatible avec tous les autres évènements (y compris avec lui-même). De plus, l'ensemble vide, étant un évènement impossible, ne se réalise jamais. Comment interpréter ces énoncés ?*

Exercice 3 *(Dans le même ordre d'idées que l'exemple précédent). Deux évènements incompatibles sont-ils nécessairement disjoints ?*

1.4 Tribu d'évènements

Définition 5 *Etant donné un ensemble quelconque Ω, l'ensemble $\mathcal{E}$ des évènements dans Ω forme une* tribu *(ou σ-*algèbre*) :*

1. *$\Omega \in \mathcal{E}$.*
2. *Si E_1, E_2, ... sont des évènements deux à deux disjoints, alors*

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots$$

   est un évènement ($\in \mathcal{E}$).

3. *Si E est un évènement, alors $\overline{E}$, le complémentaire de E dans Ω, est également un évènement.*

Le couple $(\Omega, \mathcal{E})$ s'appelle un espace probabilisable*.*

1.4.1 Indicatrice d'un évènement

Il est parfois utilise d'utiliser l'indicatrice d'un évènement. Soit donc A un évènement. L'indicatrice de A est définie par

$$I_A : \Omega \to \{0, 1\}$$
$$\omega \to \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction a des propriétés intéressantes (vérifiables immédiatement).

1. $I_A \leq I_B \Leftrightarrow A \subset B$.
2. $I_A = I_B \Leftrightarrow A = B$.
3. $I_{\overline{A}} = 1 - I_A$.
4. $I_{AB} = I_A I_B = \min\{I_A, I_B\}$.
5. $I_{A \setminus B} = I_A - I_A I_B$.
6. $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A I_B = \max\{I_A, I_B\}$.
7. $I_A = 1 \Leftrightarrow A$ est certain ($A = \Omega$).
8. $I_A = 0 \Leftrightarrow A$ est impossible ($A = \emptyset$).
9. $I_A^2 = I_A$.

1.4.2 Exercice

Exercice 4 *Démontrer les propriétés de l'indicatrice d'un évènement (facile).*

2 Probabilité

Une fois un ensemble fondamental Ω et l'ensemble $\mathcal{E}$ des évènements défini, on peut passer à l'étape suivante qui consiste à attribuer une probabilité aux évènements.

Définition 6 Probabilité. Espace probabilisé. *Soit* $(\Omega, \mathcal{E})$ *un espace probabilisable. Une (mesure de) probabilité sur* Ω *est une fonction*

$$P : \mathcal{E} \longrightarrow [0, 1]$$

vérifiant les propriétés

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots$ (σ-additivité) *où les* E_n *sont des évènements deux à deux disjoints.*

Le triplet $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *est appelé un* espace probabilisé.

Exemple 17 *Si on lance un dé une fois, on a* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Il contient* 6 *éléments. Il y a*

$$2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$$

évènements. Si le dé est régulier (non biaisé), il est naturel de penser que toutes les faces ont la même chance d'apparaître (cas équiprobable*). Ainsi, si on pose* $\omega_i =$ *"la face i apparaît",* $i = 1, 2, ..., 6$, *on pose* $P(\{\omega_i\}) = 1/6$. *Il est facile de voir que* P *ainsi défini est une mesure de probabilité sur* Ω.

2.1 Conséquences immédiates

Les propriétés suivantes découlent directement de la définition d'une probabilité.

1. $$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$
2. Si $A \cap B = \emptyset$ alors $$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$
3. $$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$
4. $$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$
   En particulier, $$\boxed{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$$
5. $$\boxed{A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}$$

2.1.1 Autres propriétés

1. Inégalité de Bonferroni : $P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$.
2. Inégalité de Boole : $P(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n\geq 1} P(E_n)$.
3. Poincaré (principe d'inclusion-exclusion) : posons

$$p_1 = \sum_{i=1}^{n} P(E_i), p_2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} P(E_i \cap E_j),$$
$$\vdots$$
$$p_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n} P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \ldots \cap E_{i_k}), ...p_n = (\cap_{i=1}^{n} E_i)$$

Alors

$$P\left(\cup_{k=1}^{n} E_k\right) = p_1 - p_2 + \ldots + (-1)^{n+1} p_n$$

Noter qu'on a

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$$

et que

$$\begin{gathered} p_1 \geq \sum_{i=1}^{n} P\left(E_i\right) \geq p_1 - p_2, \\ p_1 - p_2 + p_3 \geq \sum_{i=1}^{n} P\left(E_i\right) \geq p_1 - p_2 + p_3 - p_4, \\ etc. \end{gathered}$$

4. Continuité. $E_n \uparrow E \Rightarrow P\left(E_n\right) \uparrow P\left(E\right)$ et $E_n \downarrow E \Rightarrow P\left(E_n\right) \downarrow P\left(E\right)$.

2.2 Ensemble fondamental fini

Si l'ensemble fondamental

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

est fini, alors on prend en général

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$$

Si les évènements élémentaires ω_i ont la même probabilité $P(\omega_i) = 1/n$, on dit qu'ils sont *équiprobables*. Dans ce cas, la probabilité d'un évènement quelconque A est donnée par

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}}$$

On a ainsi le rapport du nombre de cas "favorables" à A divisé par le nombre de cas "possibles". Ce type de probabilités est dit *classiques* et remonte à Pascal et Fermat.

Exemple 18 *Soit l'expérience qui consiste à lancer deux pièces de monnaie équilibrées. Considérons les évènements $A =$"la première pièce donne pile" et $B =$"la deuxième pièce donne face". On peut prendre pour ensemble fondamental $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$. La probabilité de $C =$"les deux pièces donnent face" est*

$$P(C) = P(FF) = \frac{1}{4}$$

et celle de $D =$"l'une des pièces donne face" est

$$P(D) = P(FP, PF, FF) = \frac{3}{4}.$$

2.2.1 Problèmes d'échantillonnage

Modèle : On tire des boules d'une urne (avec ou sans remise).

Echantillonnage sans remise On tire r boules sans remise d'une urne contenant n boules ($r \leq n$). Si on considère qu'on tire les boules *l'une après l'autre* (échantillonnage séquentiel), on peut choisir pour ensemble fondamental

$$\Omega_1 = \{(b_1, b_2, \ldots, b_r) : b_i \neq b_j \text{ si } i \neq j\}$$

On a

$$|\Omega_1| = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Prenons comme mesure de probabilité P sur cet ensemble la mesure équiprobable, c'est-à-dire

$$P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\}) \text{ pour } i \neq j$$

Pour fixer les idées, prenons un cas numérique.

Exemple 19 *Soit une urne U contenant n boules de deux couleurs différentes : k rouges et $n-k$ blanches. On tire $r = 3$ boules sans remise. Trouver la probabilité que la deuxième boule soit rouge (évènement A). Avec l'ensemble fondamental Ω_1 décrit ci-dessus ($r = 3$), on a $A = \{(b_1, b_2, b_3) : b_2 = \text{ rouge}\}$ et on voit que $|A| = r(n-1)(n-2)$. On en conclut que*

$$P(A) = \frac{k(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{k}{n}$$

Ce résultat peut être vérifié par une énumération directe : il y a n choix pour b_1. Une fois b_1 choisi, il y a k ou $k-1$ choix pour b_2 (suivant que b_1 est blanche ou rouge) et $n-2$ choix pour b_3. Donc (principe d'addition)

$$|A| = (n-k)k(n-2) + k(k-1)(n-2) = k(n-1)(n-2)$$

Retournons à l'expérience initiale qui consiste à tirer sans remise r boules d'une urne qui en contient n. On considère cette fois que les boules sont tirées simultanément. L'ordre n'intervient plus. Dans ce cas, l'ensemble fondamental devient

$$\Omega_2 = \{\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}\}$$

Les éléments de Ω_2 sont non ordonnés. Il est clair que

$$|\Omega_2| = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Avec un tel choix de l'ensemble fondamental, on ne peut pas traiter l'exemple ci-dessus. Cependant, il y a de multitudes de situations pour lesquelles ce choix est adéquat.

Exemple 20 *Une urne contient 9 boules rouges et 6 boules blanches. On tire 5 boules sans remise. Trouver la probabilité que 2 soient rouges (évènement B). On a donc*

$$|B| = \binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3}$$

puisqu'il y a $\binom{9}{2}$ façons de choisir 2 boules rouges parmi 9 et $\binom{6}{3}$ façons de choisir 3 boules blanches parmi 6. La probabilité cherchée est donc

$$P(B) = \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

Vérifions ce résultat en utilisant l'ensemble fondamental Ω_1. Dans ce cas,

$$B = \{(b_1, b_2, \ldots, b_5) \in \Omega_1 : \text{ 2 sont rouges et 3 sont blanches}\}$$

Il y a $\binom{5}{2} = 10$ combinaisons de 5 boules dont deux sont rouges et 3 sont blanches. Dans chacune de ces combinaisons, il y a $(9)_2 = 9 \cdot 8$ façons de choisir deux boules rouges et $(6)_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4$ façons de choisir 3 boules blanches. Donc

$$P(B) = \binom{5}{2} \frac{(9)_2 \cdot (6)_3}{(15)_5} = \frac{240}{1001},$$

comme il se doit.

Exemple 21 *Capture-recapture (maximum de vraisemblance). On veut estimer la taille N d'une population de poissons dans un lac. Pour ce faire, on en pêche un nombre donné n, on les étiquette puis on les remet immédiatement dans l'eau. Un peu plus tard, on en repêche n autres et on trouve k qui sont déjà étiquettés. En supposant l'équiprobabilité, la probabilité qu'il y ait k $(0 \leq k \leq n)$ étiquettés dans la seconde pêche est donnée par*

$$L(N) = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Les nombres n, r et k étant connus, on veut estimer N. On considère $L(N)$ comme une fonction de la taille (inconnue) N. L'approche du maximum de vraisemblance (sujet du chapitre 8) consiste à choisir la valeur qui maximise la vraisemblance $L(N)$. Pour ce faire, examinons le rapport

$$\begin{aligned} \frac{L(N)}{L(N-1)} &= \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{n-k}}{\binom{N}{n}} \frac{\binom{N-1}{n}}{\binom{n}{k}\binom{N-1-n}{n-k}} = \frac{\binom{N-n}{n-k}}{\binom{N}{n}} \frac{\binom{N-1}{n}}{\binom{N-1-n}{n-k}} \\ &= \frac{(N-n)^2}{N(N-2n+k)} \end{aligned}$$

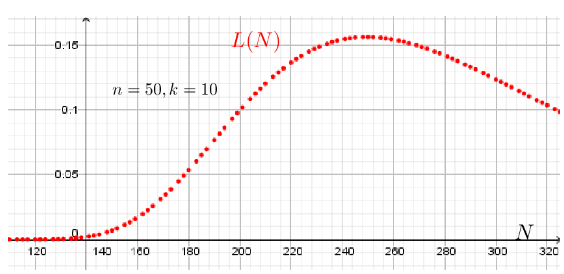
(c'est une fonction discrète, nous ne pouvons pas utiliser les méthodes du calcul différentiel). Examinons pour quelles valeur de N on a $L(N) > L(N-1)$ (c-à-d quand $L(N)$ est croissante)

$$\begin{aligned} \frac{L(N)}{L(N-1)} = \frac{(N-n)^2}{N(N-2n+k)} &> 1 \\ &\Leftrightarrow (N-n)^2 > N(N-2n+k) \\ &\Leftrightarrow n^2 > Nk \\ &\Leftrightarrow N < \frac{n^2}{k} \end{aligned}$$

Ainsi, $L(N)$ est croissante pour $N < \frac{n^2}{k}$, atteint donc son maximum en $\left\lfloor \frac{n^2}{k} \right\rfloor$ (partie entière), puis décroît. L'estmation cherchée est alors

$$\widehat{N} = \left\lfloor \frac{n^2}{k} \right\rfloor$$

Application numérique. Si $n = 50$ et $k = 10$, alors $\widehat{N} = \left\lfloor \frac{50^2}{10} \right\rfloor = 250$.



Il est intéressant de noter que

$$\frac{n}{N} = \frac{k}{n}$$

La proportion étiquettée dans la seconde pêche est égale à la proportion de tous les poissons étiquettés dans la population totale.

Echantillonnage avec remise *Problèmes d'occupation.* On met k boules dans n boîtes (au hasard). On se pose des questions sur le nombre de boîtes occupées par des boules. Un ensemble fondamental pour cette expérience est construit comme suit : Appelons les boites $B_1, B_2, \ldots, B_n$ et convenons que mettre une boule dans une boîte revient à sélectionner cette boîte. On a donc *un tirage avec remise* puisque plusieurs boules peuvent occuper la même boîte. Illustrons ceci par deux exemples numériques.

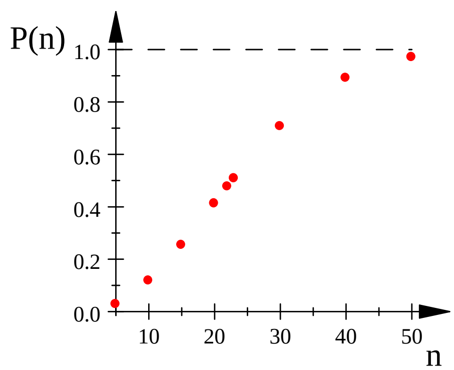
Exemple 22 *Trois boules sont mises au hasard dans* 3 *boîtes. Trouver la probabilité que les* 3 *boules sont dans la même boîte. La réponse (évidente) est* $P = \frac{3}{3^3} = 1/9$.

Exemple 23 *Anniversaires. Dans un groupe de n personnes, trouver la probabilité que* 2 *au moins ont le même anniversaire. On ignorera les années bissextiles. Notre problème revient à mettre n boules dans* 365 *boîtes. Il s'agit donc d'occupations multiples. Notons que si $n > 365$, cette probabilité est trivialement égale à* 1 *et si $n = 1$, elle est égale à* 0. *On supposera donc $1 \leq n \leq 365$. Considérons l'évènement complémentaire, celui qui consiste à mettre chacune des boules dans une boite distincte. La probabilité de cet évènement est $\frac{(365)_n}{365^n}$. La probabilité cherchée est alors*

$$P_n = 1 - \frac{(365)_n}{365^n}$$

Le tableau ci-dessous donne une idée de l'évolution de P_n avec n :

n	5	10	15	20	22	23	30	40	50
P_n	0.027	0.117	0.253	0.411	0.476	0.507	0.706	0.891	0.970



Il y a deux remarques à faire sur ce tableau : il suffit de prendre une cinquantaine de personne pour être quasiment certain qu'au moins deux ont le même anniversaire. La médiane *(50% de la probabilité) est atteinte dès qu'on choisi* 23 *personnes.*

3 Probabilité conditionnelle

Commençons par quelques exemples.

Exemple 24 *Supposons que* 50% *de la population d'une certaine ville est du sexe féminin. De plus* 5% *des hommes et* 1% *des femmes sont gauchers. On selectionne un gaucher au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ? un homme ? On supposera qu'il n'y a pas d'ambidextre dans cette ville.*

Réponse *On peut mettre les données dans un tableau à deux entrées (table de contingence)*

	Gaucher	*Droitier*	*Total*
Homme	0.025 *(5% × 50%)*	0.475 *(95% × 50%)*	0.5
Femme	0.005 *(1% × 50%)*	0.495 *(99% × 5%)*	0.5
Total	0.03	0.97	1

On voit tout de suite que (proportions)

$$
\begin{aligned}
P\left(H \mid G\right) &= \frac{0.025}{0.03} = \frac{5}{6}, \\
P\left(F \mid G\right) &= \frac{0.005}{0.03} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Ce résultat était tout-à-fait prévisible car les proportions des femmes et des des hommes étant les mêmes, les données nous disent qu'il y a 5 fois plus de gauchers chez les hommes que chez les femmes. Donc, on peut tout aussi bien écrire

$$
P\left(H \mid G\right) = \frac{5}{5+1} \text{ et } P\left(F \mid G\right) = \frac{1}{5+1}.
$$

Une autre façon de représenter le tableau ci-dessus est via un arbre :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \textit{Évènement} & \textit{Probabilité} \\
 & \overset{0.5}{\nearrow} H & \overset{0.05}{\nearrow} G & HG & 0.5 \times 0.05 = 0.025 \\
 & & \underset{0.95}{\searrow} D & HD & 0.5 \times 0.95 = 0.475 \\
\textit{Début} & & & & \\
 & & \overset{0.01}{\nearrow} G & FG & 0.5 \times 0.01 = 0.005 \\
 & \underset{0.5}{\searrow} F & \underset{0.99}{\searrow} D & FD & 0.5 \times 0.99 = 0.495
\end{array}
$$

Pour trouver les probabilités des évènements G et D (dernière ligne de la table de contingence), il suffit d'appliquer les formules d'addition :

$$
\begin{aligned}
P\left(G\right) &= P\left(HG \cup FG\right) = 0.025 + 0.005 = 0.03, \\
P\left(D\right) &= P\left(HD \cup FD\right) = 0.475 + 0.495 = 0.97.
\end{aligned}
$$

Renversons l'arbre ci-dessus pour mettre en premier les évènements G et D :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \textit{Événement} & \textit{Probabilité} \\
 & \overset{0.03}{\nearrow} G & \overset{?}{\nearrow} H & HG & 0.025 \\
 & & \underset{?}{\searrow} F & FG & 0.005 \\
\textit{Début} & & & & \\
 & & \overset{?}{\nearrow} H & HD & 0.475 \\
 & \underset{0.97}{\searrow} D & \underset{?}{\searrow} F & FD & 0.495
\end{array}
$$

On voit que l'effet sur les deux dernières colonnes est inchangé (mais les lignes sont permutées). Pour finaliser (calculer les ?), il suffit alors de diviser le nombre de la colonne de droite par celui de gauche. Ainsi

$$
\begin{aligned}
P\left(H \mid G\right) &= \frac{0.025}{0.03} = \frac{5}{6}, \\
P\left(F \mid G\right) &= \frac{0.005}{0.03} = \frac{1}{6}, \\
P\left(H \mid D\right) &= \frac{0.475}{0.97} = \frac{95}{194}, \\
P\left(F \mid D\right) &= \frac{0.495}{0.97} = \frac{99}{194}.
\end{aligned}
$$

Exemple 25 *Trois boîtes contiennent chacune deux boules ; la boîte I : 2 vertes, la boîte II : une verte et une rouge et la boîte III : 2 rouges.*

$$
\underset{I}{\boxed{V, V}} \quad \underset{II}{\boxed{V, R}} \quad \underset{III}{\boxed{R, R}}
$$

On choisit une boule au hasard d'une boîte (choisie au hasard). Elle est verte. On cherche la probabilité que la seconde boule (de cette même boîte) soit aussi verte. Que pensez-vous des différentes réponses suivantes ?

1. *Une seule boîte parmi les* 3 *contient* 2 *vertes. Donc* $P = \frac{1}{3}$.
2. *On sait que la boule tirée est verte. Ceci élimine la boîte III :* $P = \frac{1}{2}$.
3. *Une simulation donne* $P \cong \frac{2}{3}$. *Donc* $P = \frac{2}{3}$.

Voici le tableau de contingence décrivant la situation :

	I	*II*	*III*	*Total*
V	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$
R	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Total	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Conclusion ?

Définition 7 *Soit* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *un espace probabilisé et soit* B *un évènement de probabilité non nulle. Soit* A *un évènement quelconque. On appelle probabilité conditionnelle de* A *sachant que* B *est réalisé le nombre, noté* $P(A \mid B)$*, défini par*

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.}$$

Exemple 26 *Considérons une famille ayant* 3 *enfants.*

1. *Quelle est la probabilité que les* 3 *enfants soient des garçons sachant que l'aîné est un garçon ?*
2. *Quelle est la probabilité que les* 3 *enfants soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?*

Réponse *Il y a* 8 *compositions possibles de la famille que nous noterons, dans l'ordre de naissance, et que nous supposerons équiprobables :*

$$\Omega = \{ggg, ggf, gfg, fgg, ffg, fgf, gff, fff\}.$$

Soient les évènements $B =$*"l'aîné est un garçon" et* $A =$*"les* 3 *enfants sont des garçons". On a*

$$B = \{ggg, ggf, gfg, gff\} \text{ et } A = \{ggg\}.$$

Donc

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}.$$

Soit $C =$*"Il y a au moins un garçon". Dans ce cas*

$$C = \{ggg, ggf, gfg, fgg, ffg, fgf, gff\}$$

et

$$P(A \mid C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}.$$

Exemple 27 *Un étudiant a deux tiroirs où il met ses chaussettes. Le premier tiroir contient* 8 *chaussettes noires et* 4 *grises ; le deuxième contient* 4 *noires et* 6 *grises. L'étudiant choisit au hasard une chaussette de chaque tiroir. Sachant qu'elles sont de la même couleur (évènement* A*), quelle est la probabilité qu'elles soient noires (évènement* N*) ?*

Réponse *On cherche donc* $P(N \mid A)$. *Puisque*

$$P(N) = \frac{8 \times 4}{12 \times 10} = \frac{32}{120}$$

et
$$P\left(A\right)=P\left(AN\cup A\overline{N}\right)=\frac{8\times 4+4\times 6}{12\times 10}=\frac{56}{120},$$
alors
$$P(N\mid A)=\frac{P(NA)}{P(A)}=\frac{P(N)}{P(A)}=\frac{32}{56}=\frac{4}{7}.$$

Énumérons quelques propriétés de la probabilité conditionnelle.

3.0.2 Exercice

Exercice 5 *Ikram, choisie au hasard, est issue d'une famille ayant* 3 *enfants. Quelle est la probabilité que Ikram soit l'aînée de sa famille ? L'ensemble fondamental de l'exemple précédent est-il adéquat pour répondre à la question ? (attention, réfléchissez bien).*

3.1 Propriétés

1. Soit B un évènement fixé tel que $P\left(B\right)>0$. Alors $P_B\left(A\right)=P\left(A\mid B\right)$ est une mesure de probabilité d'ensemble fondamental B. Elle vérifie donc les propriétés usuelles d'une probabilité (par exemple $P_B\left(A_1\cup A_2\right)=P_B\left(A_1\right)+P_B\left(A_2\right)-P_B\left(A_1A_2\right)$, $P_B\left(\overline{A}\right)=1-P_B\left(A\right)$, etc.).
2. Si $AB=\varnothing$ alors $P\left(A\mid B\right)=0$. Ceci signifie donc que *deux évènements incompatibles sont dépendants* (la réalisation de l'un empêche celle de l'autre).
3. Si $A\subset B$ alors $P\left(A\mid B\right)=P\left(A\right)/P\left(B\right)$ et $P\left(B\mid A\right)=1$.
4. Si $AB=\varnothing$, la probabilité que A est réalisé "avant" B est donnée par $P\left(A\mid A\cup B\right)=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$. (Que se passe-t-il si AB n'est pas vide ?)

Théorème 1 *(*Succession d'évènements*). Soient $A_1,A_2,\ldots,A_n$ n évènements définis sur un même ensemble fondamental et vérifiant $P(A_1A_2\ldots A_n)>0$. Alors*
$$P\left(A_1A_2\right)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)$$
$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)$$

En général,
$$\boxed{P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\ldots P(A_n\mid A_1A_2\ldots A_{n-1}).}$$

Exemple 28 *Considérons deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune initialement deux boules noires et trois boules blanches. On tire une boule de l'urne U_1, on note sa couleur et on la met dans l'urne U_2, puis on tire une boule de l'urne U_2. Les choix se faisant au hasard, quelle est la probabilité d'obtenir deux fois une boule noire ?*

Réponse *Soient les évènements N_1 :"la boule tirée de U_1 est noire" et N_2 :"la boule tirée de U_2 est noire". On a*
$$P\left(N_1N_2\right)=P\left(N_1\right)P\left(N_2\mid N_1\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$$

Exemple 29 *Soit une urne contenant* 4 *boules blanches et* 3 *boules noires. On tire une à une et sans remise* 3 *boules de l'urne. Quelle est la probabilité que la première boule soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?*

Réponse *Soient B_i :"la boule i est blanche" et N_i :"la boule i est noire". On a*
$$P\left(B_1B_2N_3\right)=P\left(B_1\right)P\left(B_2\mid B_1\right)P\left(N_3\mid B_1B_2\right)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$$

3.2 Cas équiprobable

On considère un ensemble fondamental $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ avec

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{N}$$

Soit $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\} \subset \Omega$ un évènement. On a

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{N}$$

Dans ce cas, pour tout évènement B :

$$\boxed{P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{|AB|}{|A|}}$$

Ceci nous dit que dans le cas équiprobable, le calcul se réduit à un simple calcul de proportions.

3.3 Théorème de Bayes

Théorème 2 *(*Probabilités totales*) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ une suite finie ou infinie d'évènements deux à deux disjoints tels que $\cup A_n = \Omega$ et $P(A_n) > 0$. Alors, pour tout évènement E :*

$$\boxed{P(E) = P(E \mid A_1)P(A_1) + \ldots + P(E \mid A_n)P(A_n) + \ldots}$$

Preuve. *Exercice.* ■

Remarque 3 *Les évènements A_n décrits dans le théorème constituent une <u>partition</u> de Ω. On dit que les A_n forment un <u>système complet d'évènements</u>.*

Exemple 30 *Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement 3 boules rouges et 5 boules blanches pour la première, et 4 boules rouges et 3 boules blanches pour la seconde. On fait une expérience en deux étapes : 1) on choisit une urne au hasard (évènement U_i) puis 2) on choisit une boule de cette urne au hasard. Trouver la probabilité qu'elle soit rouge (évènement R).*

Solution *La réponse est donnée à l'aide du théorème des probabilités totales comme suit :*

$$P(R) = P(R \mid U_1)P(U_1) + P(R \mid U_2)P(U_2) = \frac{3}{8}\frac{1}{2} + \frac{4}{7}\frac{1}{2} = \frac{53}{112} \simeq 0,47.$$

Théorème 3 *(*Théorème de Bayes[1]*) Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement E :*

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A_k \mid E) = \dfrac{P(E \mid A_k)P(A_k)}{P(E \mid A_1)P(A_1) + \ldots + P(E \mid A_n)P(A_n) + \ldots}, \\ \text{pour } k = 1, 2, \ldots \end{array}}$$

Preuve. *Exercice.* ■

[1] Révérend Thomas Bayes (1702-1761). Mathématicien et pasteur britannique.

Exemple 31 *Considérons deux urnes U_1 et U_2. La première contient 6 boules blanches et 7 boules noires. La deuxième contient 5 boules blanches et 6 boules noires. On jette une pièce de monnaie. Si le résultat est face, on tire une boule de l'urne U_1. Dans le cas contraire, on tire une boule de l'urne U_2. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu un pile sachant que la boule tirée est blanche ?*

Réponse *Introduisons les évènements B :"on tire une boule blanche" et F :"la pièce donne face". On désire calculer $P(F \mid B)$:*

$$P(F \mid B) = \frac{P(B \mid F)P(F)}{P(B \mid F)P(F) + P(B \mid \overline{F})P(\overline{F})} = \frac{\frac{6}{13}\frac{1}{2}}{\frac{6}{13}\frac{1}{2} + \frac{5}{11}\frac{1}{2}} = \frac{66}{131} \approxeq 0.504.$$

Exemple 32 *Vous savez qu'une certaine lettre se trouve dans un des 3 classeurs que vous possédez. Soit p_i la probabilité de trouver votre lettre, après avoir examiné rapidement le classeur, si la lettre est réellement dans le classeur i. Supposons que vous aviez examiné le classeur 1 et que vous ne l'aviez pas trouvée. Quelle est la probabilité que la lettre soit dans le classeur 1 ?*

Réponse *Soient les évènements : C_i :"la lettre est dans le classeur i", $i = 1, 2, 3$ et E :"la lettre n'a pas été trouvée, après examination rapide du classeur 1". On a :*

$$P(C_1 \mid E) = \frac{P(E \mid C_1)P(C_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E \mid C_i)P(C_i)} = \frac{(1-p_1)\frac{1}{3}}{(1-p_1)\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{1-p_1}{3-p_1}.$$

Exemple 33 *Vous recevez deux colis de 50 objets chacun venant de 2 endroits différents. D'habitude, 10% des objets du premier fournisseur sont défectueux (évènement F_1) et 20% des objets du second fournisseur sont défectueux (évènement F_2). On ouvre un colis au hasard et on tire un objet au hasard. Il est défectueux (évènement D). Quelle est la probabilité qu'il provienne du second colis ? En d'autres termes, on demande $P(F_2 \mid D)$.*

Réponse *Une application du théorème de Bayes donne*

$$P(F_2 \mid D) = \frac{P(D \mid F_2)P(F_2)}{P(D \mid F_1)P(F_1) + P(D \mid F_2)P(F_2)} = \frac{\frac{20}{100}\frac{1}{2}}{\frac{10}{100}\frac{1}{2} + \frac{20}{100}\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

3.3.1 Exercice

Exercice 6 *Dans une boîte, on met n_1 boules de couleur 1, n_2 boules de couleur 2, ..., n_r boules de couleur r. On supposera les couleurs distinctes et les $n_i > 0$. Posons $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$. On tire, sans remise, k boules ($k > 0$).*

1. *Trouver les probabilité que toutes les boules tirées soient de couleurs distinctes (une couleur n'apparaît pas deux fois) ?*
2. *Si on sait qu'au moins $k - 1$ sont de la même couleur, quelle est la probabilité qu'elles soient toutes (les k tirées) de la même couleur ?*

4 Indépendance

Intuitivement, deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un n'a aucun effet sur celle de l'autre : $P(B \mid A) = P(B)$ et, par symétrie, $P(A \mid B) = P(A)$. Maintenant, à partir de la formule de succession d'évènements $P(AB) = P(A)P(B \mid A)$, on adopte la définition suivante.

Définition 8 *Deux évènements A et B sont dits (stochastiquement ou statistiquement)* indépendants *si*

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$$

Exemple 34 *Considérons le jet de deux dés et soient les évènements A :"la somme des points est égale à 6" et B :"le premier dé donne un 4". On a*

$$\begin{aligned} A &= \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}, \\ B &= \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}, \\ AB &= \{(4,6)\}. \end{aligned}$$

Donc

$$P(AB) = \frac{1}{36},$$

tandis que

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{5}{216}.$$

On voit que A et B ne sont pas indépendants. On dit qu'ils sont dépendants.

Exemple 35 *Considérons la même expérience que dans l'exemple précédent et soit l'évènement $C =$"la somme des points est égale à 7"*

$$= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),5,2),(6,1)\}.$$

On a $BC = \{(4,3)\}$ et

$$P(BC) = \frac{1}{36},$$

tandis que

$$P(B) \cdot P(C) = \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36}.$$

Les évènements B et C sont indépendants.

Exemple 36 *On lance une pièce de monnaie deux fois. Soient les évènements A :"on obtient pile au premier coup" et B :"on obtient un pile et un face". Prenons $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. On a $A = \{PP, PF\}$ et $B = \{PF, FP\}$, et donc $AB = \{PF\} \neq \emptyset$. De plus $P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B) = \frac{2}{4}\frac{2}{4}$. Donc A et B sont indépendants.*

Remarque 4 *Il est faux de croire que deux évènements indépendants sont disjoints et, réciproquement, que deux évènements disjoints sont indépendants (pour ce dernier cas, il suffit de considérer un évènement A et son opposé $\overline{A}$).*

Exemple 37 *On lance une pièce de monnaie n fois ($n \geq 2$). Considérons les évènements A :"obtenir au moins un pile et au moins un face" et B :"obtenir au plus un face". A et B sont-ils indépendants ?*

Réponse *On a $P(\overline{A}) = P(\text{pas de pile}) + P(\text{pas de face}) = 2/2^n$ et donc $P(A) = 1 - 2/2^n$. Quant à $P(B) = P(0 \text{ face}) + P(1 \text{ face}) = 1/2^n + n/2^n$. Enfin, $P(A \cap B) = P(\text{exactement } 1 \text{ face}) = n/2^n$. Pour que A et B soient indépendants, il faut que*

$$P(A \cap B) = n/2^n = P(A)P(B) = (1 - 2/2^n)(1/2^n + n/2^n).$$

Si on résout pour n, on trouve $n = 3$. Donc A et B sont indépendants uniquement dans le cas où on lance la pièce 3 fois. Dans tous les autres cas, ils sont dépendants.

Proposition 1 *Soient A et B deux évènements. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A et B sont indépendants.*
2. *A et $\overline{B}$ sont indépendants.*
3. *$\overline{A}$ et B sont indépendants.*
4. *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

4.1 Indépendance globale

Définition 9 *Indépendance globale (ou totale). Soit $I \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, I non vide et soit $\{A_i : i \in I\}$ une collection d'évènements. On dit que les A_i sont dit (mutuellement ou globalement) indépendants si*

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

pour tous les sous-ensembles non vides $J \subset I$.

En particulier, si les évènements A_i sont totalement indépendants (I contenant au moins deux indices), ils sont deux-à-deux indépendants :

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j) \qquad \forall i \neq j \in I$$

Mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple 38 *On lance une pièce régulière deux fois. $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$. Alors les évènements $A =$"Pile au premier lancer", $B =$"Pile au second lancer" et $C =$"Même résultat aux deux lancers" sont deux à deux indépendants mais non globalement indépendants.*

Exemple 39 *On lance deux dés. Soient A_1 :"le premier dé donne un nombre pair", A_2 :"le second dé donne un nombre pair" et A_3 :"la somme des deux dés est paire". On a*

$$\begin{aligned} P(A_1) = P(A_2) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(A_3) &= \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ P(A_1A_2) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\ P(A_1A_3) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\ P(A_2A_3) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\ P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2) &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Les évènements A_1, A_2, A_3 ne sont pas mutuellement indépendants puisque

$$P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Cependant, ils sont deux à deux indépendants.

4.2 Indépendance conditionnelle

Définition 10 *Deux évènements A et B sont dits indépendants conditionnellement à un événement C si*

$$P(A \cap B \,|C) = P(A\,|C)\, P(B\,|C)$$

On peut généraliser à plus de deux événements.

On peut avoir deux évènement dépendants mais conditionnellement indépendants (exercice).