Chapitre 5.1 Valeur extrêmes - Fonctions de 2 variables

Théorème:

Si f possède un min ou un max local en (a,b) et si les dérivées partielles f_x et f_y existent en (a,b), alors $\nabla f(a,b) = (f_x(a,b), f_y(a,b)) = 0$.

Définition:

(x_0, y_0) est un point critique de $f(x,y)$ si $f_x(x_0,y_0)=0$ et $f_y(x_0,y_0)=0$ ou l'une (ou deux) des dérivées n'existent pas en (x_0,y_0).

Si f possède un min ou un max local en (a,b), alors forcément (a,b) est un point critique de $f(x,y)$.

Mais l'inverse pas nécessairement vrai.

exemple.

Trouver les points critiques de $f(x,y) = x^2+y^2-2x-6y+14$.

$f_x = 2x-2 \qquad f_y = 2y-6$.

$f_x = 0 \Rightarrow x=1. \qquad f_y=0 \Rightarrow y=3$.

point critique $(1,3)$

$f(x,y) = (x^2-2x+1)-1+(y^2-6y+9)-9+14$

$= (x-1)^2+(y-3)^2+4 \geq f(1,3)$.

donc $f(1,3) \Rightarrow$ min local

exemple. $f(x,y) = y^2-x^2$.

$f_x = -2x. \qquad f_y = 2y. \qquad$ point critique: $(0,0)$

mais $f(0,0)$ ni un max, ni un min.

Test des dérivées secondes.

Soit $f(x,y)$ dont les dérivées premières et secondes existent et sont continues au voisinage du point critique (a,b) (c-a-d $\nabla f(a,b)=0$).

$\alpha_1 = f_{xx}(a,b)$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)\cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b).$$

a) $\alpha_2 > 0$ et $\alpha_1 > 0 \Rightarrow$ min local.

b) $\alpha_2 > 0$ et $\alpha_1 < 0 \Rightarrow$ max local.

c) $\alpha_2 < 0 \Rightarrow$ point de selle.

d) $\alpha_2 = 0$ pas de conclusion.

exemple:

$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$

$f_x = 4x^3 - 4y. \qquad f_y = 4y^3 - 4x.$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{matrix} \Rightarrow (y^3)^3 - y = 0 \Rightarrow y^9 - y = 0.$$

$y^9 - y = 0 \Leftrightarrow y(y^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow y(y^4+1)(y^4-1) = 0.$

$\Leftrightarrow y(y^4+1)(y^2+1)(y^2-1) = 0. \Leftrightarrow y(y^4+1)(y^2+1)(y+1)(y-1) = 0.$

$\Rightarrow y = 0,$ ou $y = 1$ ou $y = -1.$

les points critiques: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = 12y^2 \qquad f_{xy} = -4.$

$\alpha_1 = 12x^2 \qquad \alpha_2 = 144x^2y^2 - 16.$

	α_1	α_2	Conclusion
$(0,0)$	0	-16	point de selle.
$(1,1)$	12	128	min local
$(-1,-1)$	12	128	min local.

exemple : $f(x,y) = x^2+4y^2-4xy+2.$

$f_x = 2x-4y$ $\quad$ $f_{xx} = 2$ $\quad$ $\alpha_1 = 2$

$f_y = 8y-4x.$ $\quad$ $f_{yy} = 8$ $\quad$ $\alpha_2 = 0.$

$f_{xy} = -4$

On ne peut pas avoir la conclusion avec le test de dérivées secondes.

Mais on peut écrire $f(x,y)$ comme $(x-2y)^2+2 \geq 2.$

Donc on a 2 comme la valeur min.

$x=2y$: droite de min local.

Max et min globaux.

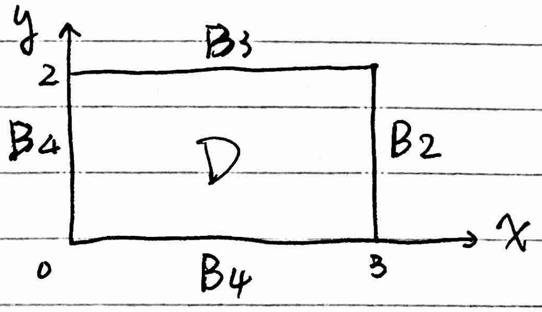
Théorème :

Si f est une fonction continue sur un ensemble fermé borné D dans $\mathbb{R}^2$,

alors f possède un max global et un min global dans D

- soit en un point critique de f à l'intérieur de D.
- soit sur la frontière de D.

exemple : Trouver max et min globaux de $f(x,y) = x^2-2xy+2y$ sur le rectangle $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$.



(1) points critiques de $f(x,y)$ à l'intérieur de D.

$\nabla f = (2x-2y, -2x+2) = 0.$

$\Rightarrow x=1, \quad y=1. \quad \Rightarrow$ point critique $(1,1) \in D.$

$f(1,1) = 1.$

(2) B1. $y=0$, $0 \le x \le 3$. $f(x,y) \to f(x,0) = x^2$.

$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x = 0 \Rightarrow x=0$.

$(0,0)$: point critique de B1. $f(0,0) = 0$.

$(3,0)$: max sur la frontière. $f(3,0) = 9$.

(3) B2. $x=3$. $0 \le y \le 2$. $f(x,y) \to f(3,y) = 9-6y+2y = 9-4y$.

$\frac{d}{dy}(9-4y) = -4 \neq 0$. $\Rightarrow$ Il n'y a pas de point critique sur B_2.

Aux frontières: $y=0$. $f(3,0) = 9$.

$y=2$ $f(3,2) = 1$.

(4) B3. $y=2$, $0 \le x \le 3$. $f(x,y) \to f(x,2) = (x-2)^2$.

point critique: $(2,2)$ $f(2,2)=0$.

frontière: $(3,2), (0,2)$ $f(3,2)=1$, $f(0,2)=4$.

(5) B4. $x=0$, $0 \le y \le 2$, $f(0,y) = 2y$.

pas de point critique.

aux frontière: $f(0,0)=0$. $f(0,2)=4$.

en conclusion, max global : $f(3,0)=9$.

min global : 0, réalisé en $(0,0)$ et $(2,2)$

5.2. Optimisation de fonctions de plusieurs variables.

2 variables:

- min / max local → $\nabla f = 0$.
- point critique si $\nabla f = 0$.

$\begin{cases} \text{min / max} \\ \text{point de selle.} \end{cases}$

- classification des points critiques.

test des dérivées secondes.

3 variables:

(1) Condition nécessaire du premier ordre pour un min local.

Si f est différentiable est possède un min local en $\vec{a}$, alors $f(\vec{a}) = 0$.

point critique:

si $f(\vec{a}) = 0$, alors $\vec{a}$ = point critique.

- Soit un min local
- soit un max local
- Soit un point de selle.

(2) Condition de deuxième ordre.

Critère de Sylvester.

$$\text{soit } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \det[a_{11}] = a_{11}$$

$$\alpha_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

$$\alpha_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Soit $B = -A$.

$\beta_1 = \det[-a_{11}] = -a_{11}$

$$\beta_2 = \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix}$$

$\vdots$

α_j : $j^{\text{ième}}$ mineur principal de A.

β_j : $j^{\text{ième}}$ mineur principal de $-A$.

Si $\alpha_j > 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots n$,
alors A est D^+ $\rightarrow$ min local

Si $\beta_j > 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots n$,
alors A est D^- $\rightarrow$ max local

Définition : matrice hessienne de f $(\nabla^2 f)$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{x_1x_2} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

$f(x,y)$: $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$.

$f(x,y,z)$: $\nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$

Condition suffisante du 2ème ordre.

Si les dérivées partielles secondes de f sont continues au voisinage du point critique $\vec{a}$ et $\nabla^2 f(\vec{a})$ est inversible

- si $\nabla^2 f$ est D^+ $\Rightarrow$ min local en $\vec{a}$.
- si $\nabla^2 f$ est D^- $\Rightarrow$ max local en $\vec{a}$.
- si $\nabla^2 f$ est undéfinie $\Rightarrow$ point de selle en $\vec{a}$.

exemple : $f(x,y,z) = x^3 - 2x + 2y^3 + 2xy + z^3 - 27z$.

$\left.\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 2 + 2y \\ f_y &= 4y + 2x \\ f_z &= 3z^2 - 27 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ 4 points critiques.

$(1, -1/2, 3)$
$(1, -1/2, -3)$
$(-2/3, 1/3, 3)$
$(-2/3, 1/3, -3)$

$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 6x & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{bmatrix}$

$\alpha_1 = 6x$
$\alpha_2 = 24x - 4$
$\alpha_3 = 6z(6y - x)$

	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	Conclusion
$(1, -1/2, 3)$	6	20	360				min local
$(1, -1/2, -3)$	6	20	-360	-6			point de selle
$(-2/3, 1/3, 3)$	-4		-360	4	-20		point de selle
$(-2/3, 1/3, -3)$	4		360	4	-20.		point de selle.

5.3. Les multiplicateurs de Lagrange.

Optimiser $f(x,y,z)$ avec contrainte $g(x,y,z)=k$
Le point (x,y,z) sur le surface de niveau K de f
Au point optimal, surface de niveau de f doit être tangente à la surface de niveau $g(x,y,z)=k$.

λ: multiplicateur de Lagrange.
Objectif: trouver le min (ou le max) de $f(x,y,z)$ sous la contrainte $g(x,y,z)=k$ (en supposant que le min ou le max existe et que $\nabla g \neq 0$ sous la surface $g(x,y,z)=k$)

Marche à suivre:

a) trouver toutes les solutions pour x, y, z, λ de

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z)=k \end{cases}$$

b) évaluer $f(x,y,z)$ en chacune solution trouvée en (a) et garder le plus petit ou le plus grand.

exemple: Trouver les extrêmes de $f(x,y) = x^2+2y^2$ avec la contrainte $g(x) = x^2+y^2=1$.

$\nabla f = (2x, 4y)$ $\quad\quad$ $\nabla g = (2x, 2y)$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x & ① \\ 4y = \lambda \cdot 2y & ② \\ x^2+y^2=1 & ③. \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ① \ \lambda=1 \text{ ou } x=0 \\ \\ ② \ y=0 \text{ ou } \lambda=2. \end{matrix}$$

(1) Si $x=0$,

- Soit $y=0$, ③ ne peut pas être satisfait.
- Soit $\lambda=2$. $\Rightarrow$ $x=0$, $y=\pm 1$.

(2) Si $\lambda=1$, ($x \neq 0$)

$4y = 2y \Rightarrow y=0. \Rightarrow x=\pm 1.$

4 points critiques: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.

$f(0,1)=2$, $f(0,-1)=2$, $f(1,0)=1$. $f(-1,0)=1$.

Conclusion: max réalisé en $(0,1)$ et $(0,-1)$

min réalisé en $(1,0)$ et $(-1,0)$

exemple: $f(x,y) = x^2+2y^2$ sur le disque $x^2+y^2 \leq 1$

min et max $\begin{cases} \text{soit en un critique à l'intérieur.} \\ \text{soit sur la frontière } f(\pm 1,0) = 2, f(0,\pm 1)=2 \end{cases}$

$\nabla f = (2x, 4y) = 0 \Rightarrow x=y=0 \Rightarrow$ point critique $(0,0)$

Conclusion:

min sur le disque $=0$ réalisé en $(0,0)$

max sur le disque $= 2$ réalisé en $(\pm 1,0)$, $(0,\pm 1)$

exemple. Trouver les points de la sphère $x^2+y^2+z^2=4$ le plus proche et le point le plus éloigné de $(3,1,-1)$

$f(x,y,z) = (x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$.

$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2=4$.

$\nabla f = (2(x-3),\ 2(y-1),\ 2(z+1))$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$$\begin{cases} 2(x-3) = \lambda \cdot 2x \\ 2(y-1) = \lambda \cdot 2y \\ 2(z+1) = \lambda \cdot 2z \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{1-\lambda} \\ y = \frac{1}{1-\lambda} \\ z = \frac{-1}{1-\lambda} \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} + \frac{1}{(1-\lambda)^2} = 4$$

$\Rightarrow 1-\lambda = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ou $1-\lambda = -\frac{\sqrt{11}}{2}$.

$\Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Sol 1: $x = \frac{6}{\sqrt{11}},\ y = \frac{2}{\sqrt{11}},\ z = \frac{-2}{\sqrt{11}},\quad f = 1.73$.

Sol 2: $x = \frac{-6}{\sqrt{11}},\ y = \frac{-2}{\sqrt{11}},\ z = \frac{2}{\sqrt{11}}.\quad f = 28.2$.

conclusion: point le plus proche $\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}\right)$

point le plus éloigné $\left(\frac{-6}{\sqrt{11}}, \frac{-2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$.

Optimisation avec 2 contraintes d'égalité.

Optimiser $f(x,y,z)$ avec $g(x,y,z)=k$ et $h(x,y,z)=c$.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h. \\ g(x,y,z)=k. \\ h(x,y,z)=c. \end{cases}$$

exemple : Trouver max de $f(x,y,z) = x+2y+3z$ avec les contraintes $\begin{cases} x-y+z=1. \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

$\nabla f = (1,2,3)$ $\quad \nabla g = (1,-1,1)$ $\quad \nabla h = (2x,2y,0)$

$$\begin{cases} 1 = \lambda + 2x\cdot\mu \\ 2 = -\lambda + 2y\cdot\mu \\ 3 = \lambda + \mu\cdot 0 \\ x-y+z=1 \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mu x &= -1. \\ \mu y &= 5/2. \end{aligned} \Rightarrow \left(\frac{-1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{5}{2\mu}\right)^2 = 1.$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{\pm\sqrt{29}}{2}.$$

Si $\mu = \frac{-\sqrt{29}}{2}$, $x = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $y = \frac{-5}{\sqrt{29}}$, $z = 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}$.

$f = 3-\sqrt{29}$. (min)

Si $\mu = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $x = \frac{-2}{\sqrt{29}}$, $y = \frac{5}{\sqrt{29}}$, $z = 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}$.

$f = 3+\sqrt{29}$ (max)

Fonctions de n variables et m contraintes.

But: optimiser $f(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et

$g_1(\vec{x}) = k_1, \quad g_2(\vec{x}) = k_2, \quad \cdots \quad g_m(\vec{x}) = K_m.$

Méthodes: Résoudre le système:

$$\begin{cases} \nabla f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(\vec{x}) \\ g_1(\vec{x}) = k_1 \\ g_2(\vec{x}) = k_2 \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) = k_m \end{cases}$$

On évalue f en toutes les solutions.

On garde la plus grande et la plus petite.

exemple: $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = (1, \cdots 1).$$

$$\nabla g = 2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 2\vec{x}$$

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x_1 \\ \vdots \\ 1 = 2\lambda x_n \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow x_i = \frac{1}{2\lambda}.$$

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \cdot n = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{n}}{2} \Rightarrow x_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Si $x_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $f(\vec{x}) = \sqrt{n}$. (max)

Si $x_i = -\frac{1}{\sqrt{n}}$, $f(\vec{x}) = -\sqrt{n}$ (min)

Généraliser: Si $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = k$, $x_i = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$, ou $\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{n}}$.

$\lambda = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{k}}$.

$\max f(\vec{x}) = \sqrt{n}\sqrt{k}$. $\min f(\vec{x}) = -\sqrt{n}\sqrt{k}$.

Optimisation avec contraintes d'inégalité ($g(\vec{x}) \leq k$)

a) déterminer les points critiques de $f(\vec{x})$

on résoud $\nabla f = 0$.

On sélectionne ceux qui sont à l'intérieur.

$g(\vec{x}) < k$.

b) On trouve les points candidats sur la frontière, donc optimiser $f(\vec{x})$ avec $g(\vec{x}) = k$.

c) On évalue f en tous les points en (a) et (b) pour trouver le min et le max.

exemple. $f(\vec{x}) = xy + yz + zw$.

$g(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1$.

$\nabla f = (y, x+z, y+w, z)$

posons $\nabla f = 0 \Rightarrow$ point critique $(0,0,0,0)$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z, 2w)$.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda \cdot 2x \\ x+z = \lambda \cdot 2y \\ y+w = \lambda \cdot 2z \\ z = \lambda \cdot 2w \\ x^2+y^2+z^2+w^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x+z = \lambda \cdot 2 \cdot \lambda \cdot 2x = 4\lambda^2 \cdot x$.

$x+z = 2 \cdot \lambda y$ $\quad z = \lambda \cdot 2w \Rightarrow x + \lambda \cdot 2w = 4\lambda^2 x$

$y+w = \lambda \cdot 2z$ $\quad z = \lambda \cdot 2w$, $y = \lambda \cdot 2x$ $\Rightarrow 2\lambda \cdot x + (1-4\lambda^2) w = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-4\lambda^2)x + 2\lambda w = 0. \\ 2\lambda x + (1-4\lambda^2) w = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-4\lambda^2 & 2\lambda \\ 2\lambda & 1-4\lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

posons $\det\begin{pmatrix} 1-4\lambda^2 & 2\lambda \\ 2\lambda & 1-4\lambda^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{8}.$

exemple: Optimiser $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$
avec $x_1^2+x_2+x_3+x_4 \geq -1.$

a) point critique:

$\nabla f = 0$

$\Leftrightarrow \left(2x_1 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2},\ 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2},\ 2x_3 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2},\ 2x_4 e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}\right) = 0.$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

on a $(0,0,0,0)$ qui est le point critique. et $g(0,0,0,0) = 0 > -1.$
i.e. $(0,0,0,0)$ est un point candidat.

b) Frontière:

$\nabla g = (2x, 1, 1, 1)$

$$\begin{cases} 2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2} x_1 = 2\lambda x_1 \\ 2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2} x_2 = \lambda \\ 2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2} x_3 = \lambda \\ 2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2} x_4 = \lambda \\ x_1^2+x_2+x_3+x_4 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \text{ ou } \lambda = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2} \\ x_2 = \dfrac{\lambda}{2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}} \\ x_3 = \dfrac{\lambda}{2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}} \\ x_4 = \dfrac{\lambda}{2e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}} \end{array}$$

si $x_1=0$, $x_2=x_3=x_4 \Rightarrow 3x_2=-1 \Rightarrow x_2=x_3=x_4=-\frac{1}{3}$.

$(0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$: point candidat sur la frontière.

si $\lambda = e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}$,

$2\lambda \cdot x_2 = \lambda$. , $2\lambda \cdot x_3 = \lambda$, $2\lambda x_4 = \lambda$.

$\Rightarrow x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = 0$. (point critique)

mais quand $x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow x_1^2 < 0$ (impossible).

Conclusion:

$f(0,0,0,0) = e^0 = 1$ (min global)

$f(0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = e^{1/3}$ (max local)

(pcq le max global n'existe pas).