Chapitre IV : les dérivées partielles.

4.1. Les dérivées des fonctions de plusieurs variables.

Dérivées partielles de $f(x,y)$

Dérivée par rapport à x de $f(x,y)$ au point (a,b).

Notation :

$$f_x(a,b) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(a,b) \quad \left(\frac{d}{dx} f(a) \right)$$

(1) $f(x,y)$: "geler" y à la variable b. $\Rightarrow f(x,b)$.

(2) prendre la dérivée par rapport à x de $f(x,b)$ et l'évaluer en $x=a$.

$$\cancel{f_x} \; f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

(si la limite existe)

même principe pour y.

$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Autres notations :

$$z = f(x,y)$$

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = D_1 f = D_x f.$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = D_2 f = D_y f.$$

exemple. $f(x,y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$.

$f_x(2,1)$ et $f_y(2,1)$

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_x(2,1) = 16.$

$f_y(x,y) = x^2 \cdot 3y^2 - 4y. \qquad f_y(2,1) = 8.$

exemple: $f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$

$f_x(x,y) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+y}\right)$ (y est "constante")

$f_y(x,y) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot x\cdot(1+y)^{-2}\cdot(-1)$

$= -\frac{x}{(1+y)^2}\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$ (x est "constante")

exemple: Fonction $z(x,y)$ est donné implicitement par

$x^3+y^3+z^2+6xyz = 1.$

trouver $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$z = f(x,y)$ ou $z(x,y)$

$F(x,y) = x^3+y^3+(z(x,y))^2+6xy\,z(x,y) = 1.$

$F_x(x,y) = (1)' = 0.$

$F_y(x,y) = (1)' = 0.$

$F_x(x,y) = 3x^2+0+2z(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+6y\left((x)'z(x,y)+x(z'(x,y))\right) \Rightarrow$

$3x^2+0+2z\frac{\partial z}{\partial x}+6y\left(z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0.$

$\Rightarrow 3x^2+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+6yz+6yx\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$

$\Rightarrow (2z+6xy)\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2-6yz$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2-6yz}{2z+6xy}.$

$$F_y(x,y) = 0 + 3y^2 + 2\underbrace{z(x,y)}_{}\overset{z}{\Uparrow}\frac{\partial z}{\partial y} + 6x\overset{z(x,y)}{\uparrow}{z} + 6xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$(2z+6xy)\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 6xz.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3y^2-6xz}{2z+6xy}.$$

Exemple:

$$f(x,y,z) = e^{xy}\ln z.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln z\, e^{xy}\cdot y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\ln z\cdot e^{xy}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xy}\cdot\frac{1}{z}.$$

Dérivées d'ordres supérieurs.

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

exemple: $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$

$f_x = 3x^2 + 2xy^3$ $\qquad$ $f_y = x^2\cdot 3y^2 - 4y.$

$f_{xx} = 6x + 2y^3.$ $\qquad$ $f_{xy} = 6xy^2.$ $\qquad$ $f_{yy} = 6x^2y - 4$

$f_{yx} = 6xy^2.$

Clairaut:

Soit $f(x,y)$ de forme sur un disque D qui contient (a,b). Si f_{xy} et f_{yx} sont continues sur D, alors $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$

4.2. Les plans tangentes et les approximations linéaires.

Si $f(x,y)$ possède des dérivées partielles f_x et f_y continues, alors l'équation du plan tangente à la surface $z = f(x,y)$ au point (x_0, y_0) est

$$\boxed{\begin{aligned} z &= z_0 + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ z_0 &= f(x_0,y_0). \end{aligned}}$$

exemple: $z = 2x^2 + y^2$.

Trouver l'équation du plan tangente en $(1,1,3)$

$f(x,y) = 2x^2 + y^2$. $\quad f_x = 4x \quad f_y = 2y$.

$f_x(1,1) = 4 \quad f_y(1,1) = 2$.

plan tangente: $z = 3 + 4(x-1) + 2(y-1)$

$= 4x + 2y - 3$.

Linéarisation:

$$L(x,y) = z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

exemple: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(1): domaine de définition: $\mathbb{R}^2$.

(2) domaine de continuité: $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

(3) Étudions $f_x(x,y)$.

i) Si $(x,y) \neq (0,0)$, $f_x(x,y) = \dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

ii) Si $(x,y) = (0,0)$,

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2+0} - 0}{h} = 0.$$

Donc, $f_x(x,y)$ est définie en $(0,0)$.

Est-ce que f_x est continue en $(0,0)$?

Il faut vérifier si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0) = 0. \ ?$$

chemin 1 : $y=0$. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{0}{x^4} = 0.$

chemin 2 : $x=0$. $\displaystyle\lim_{y \to 0} \frac{y^3}{y^4} = \infty.$

Donc la limite de $f_x(x,y)$ n'existe pas.

$\Rightarrow$ $f_x(x,y)$ est définie, mais pas continue.

Fonction différentiable

Définition : Soit $z = f(x,y)$, f est différentiable en (a,b) si on peut exprimer Δz sous la forme

$$\Delta z = f_x(a,b)\,\Delta x + f_y(a,b)\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ si $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

ou $f(a+\Delta x, b+\Delta y) = Z = f(a,b) + f_x(a,b)(\overbrace{a+\Delta x}^{x}-a) +$
$f_y(a,b)(\underbrace{b+\Delta y}_{y}-b) + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$

exemple:

$f(x,y) = xy - 5y^2$ est différentiable en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$\Delta Z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$

$= (a+\Delta x)(b+\Delta y) - 5(b+\Delta y)^2 - (ab-5b^2)$

$= ab + a.\Delta y + \Delta x.b + \Delta x\Delta y -$
$5(b^2 + \Delta y^2 + 2\Delta y.b) - (ab-5b^2)$
$= b\Delta x + (a-10b)\Delta y + \Delta x\Delta y - 5(\Delta y)^2$

$f_x(a,b) = b \qquad f_y(a,b) = a-10b.$

on peut avoir

$\Delta Z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \Delta x\Delta y - 5(\Delta y)^2.$

on pose

$\varepsilon_1 = \Delta y, \qquad \varepsilon_2 = -5\Delta y.$

on a

$\Delta Z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y.$

avec $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to (0,0)$ si $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

$\Rightarrow f(x,y)$ est différentiable.

Théorème: Une façon plus simple pour voir si une fonction est différentiable:
Si f_x et f_y existent dans un voisinage de (a,b) incluant (a,b) et sont continues en (a,b), alors f est différentiable en (a,b).

exemple:

$f(x,y) = x \cdot e^{xy}$ différentiable en $(1,0)$?

$f_x = e^{xy} + xye^{xy}$

$f_y = x^2 e^{xy}$

f_x est continue partout, donc elle est continue en $(1,0)$.
f_y aussi.

(1) Si f n'est pas continue en (a,b), alors f n'est pas différentiable en (a,b)

(2) Si f est continue, c'est pas assez pour conclure

(3) Si f est différentiable en (a,b), alors f est continue en (a,b)

Différentielle:

Considérons dx et dy "les différentielles" comme des variables indépendantes.

$dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$

Si on pose $dx = \Delta x = x-a.$
$dy = \Delta y = y-b.$ $\Rightarrow$

la différentielle totale :

$dz = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$.

$\Rightarrow$ approximation linéaire :

$f(x,y) = f(a,b) + dz$.

Fonction de 3 variables. (ou plus).

approximation linéaire autour de (a,b,c)

de $f(x,y,z) \simeq f(a,b,c) + f_x(a,b,c)(x-a) + f_y(a,b,c)(y-b) + f_z(a,b,c)(z-c)$.

4.3. Dérivation en chaîne.

Cas 1: Si $z = f(x,y)$ est différentiable par rapport à x et à y et si $x = g(t)$ et $y = h(t)$ deux fonctions différentiables de t,
alors z est une fonction différentiable de t.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

exemple: $z = x^2y + 3xy^4$ avec $x = \sin 2t$, $y = \cos t$.
Calculer $\frac{dz}{dt}$ en $t=0$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y^4$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3.$

$\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t$ $\qquad$ $\frac{dy}{dt} = -\sin t.$

en $t=0$, $\frac{dx}{dt} = 2.$ $\qquad$ $\frac{dy}{dt} = 0.$

$x = \sin 2t = 0,$ $\qquad$ $y = \cos t = 1.$

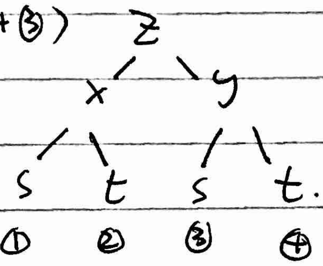
$\frac{\partial z}{\partial x} = 3.$ $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

$$\frac{dz}{dt} = 3\times 2 = 6.$$

Cas 2. $\quad Z = f(x,y) \quad x = g(s,t) \quad y = h(s,t).$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (1+3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2+4)$$



exemple: $\quad Z = e^x \sin y \quad$ avec $\quad x = st^2, \quad y = s^2 t.$

trouver $\frac{\partial z}{\partial s}$ et $\frac{\partial z}{\partial t}$.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= e^x \sin y \, t^2 + e^x \cos y \cdot 2t \cdot s$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= 2e^x \sin y \, st + e^x \cos y \cdot s^2.$$

Règle de dérivation en chaîne, version générale.

u: fonction differentiable de variable $x_1, x_2, \dots x_m$

Chaque fonction x_i : fonction differentiable de m variables $t_1, t_2, \dots t_m$.

$i = 1, 2, \dots m.$

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$

exemple: $u = x^4 y + y^2 z^3$ avec $x = rse^t$, $y = rs^2 e^{-t}$, $z = r^2 s \sin t$.

Calculer $\frac{\partial u}{\partial s}$ avec $r=2$, $s=1$, $t=0$. $\Rightarrow$ $x=2$, $y=2$, $z=0$.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^4 + 2yz^3 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 3y^2 \cdot z^2.$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = re^t \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = 2sre^{-t} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = r^2 \sin t.$$

$$4x^3 y = 128, \qquad x^4 + 2yz^3 = 64 \qquad 3y^2 z^2 = 0.$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = 4, \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 128 + 64 = 192.$$

exemple. $z = f(x,y)$ $\quad x = r^2 + s^2 \quad y = 2rs.$

Trouver $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right). \qquad \frac{\partial x}{\partial r} = 2r, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = 2s.$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{f_x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{f_y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = 2r f_x + 2s f_y.$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(2r f_x + 2s f_y) = 2 f_x + 2r \cdot \frac{\partial}{\partial r} f_x + 2s \frac{\partial}{\partial r} f_y.$$

$\boxed{f_x = f_x(x,y)}$

$$\frac{\partial}{\partial r}(f_x) = \frac{\partial}{\partial x} f_x \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot f_x \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= f_{xx} \cdot 2r + f_{xy} \cdot 2s.$$

$f_y = f_y(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial r}(f_y(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x} f_y \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial r}.$$

$$= f_{yx} \cdot 2r + f_{yy} \cdot 2s.$$

$$2f_x + 2r \frac{\partial}{\partial r} f_x + 2s \frac{\partial}{\partial r} f_y.$$

$$= 2f_x + 4r^2 f_{xx} + 4rs f_{xy} + 4rs f_{yx} + 4s^2 f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2f_x + 4r^2 f_{xx} + 8rs f_{xy} + 4s^2 f_{yy}.$$

Théorème des fonctions implicites :

Si F est définie sur un disque contenant (a,b) avec $F(a,b)=0$, $F_y(a,b) \neq 0$, et si F_x et F_y sont continues sur ce disque, donc $F(x,y)=0$ définit implicitement y comme une fonction de x près du point (a,b) et l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

donne la dérivée de cette fonction.

Soit $F(x,y)=0$, définit implicitement $y(x)$

$$\frac{dF}{dx}(x, y(x)) = F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

exemple : Trouve y' $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ au point $(4/3, 8/3)$ de $x^3+y^3=6xy$.

$F(x) = x^3+y^3-6xy=0$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$F_x = 3x^2-6y$. $\quad F_y = 3y^2-6x$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2-6y}{3y^2-6x} = \frac{4}{5}.$$

4.4. Dérivées directionnelles et vecteurs gradient.

Définition :

Dérivée directionnelle dans la direction $\vec{u}=(a,b)$ de f au point (x_0,y_0) et $f_{\vec{u}}(x_0,y_0) =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah,\ y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h} \quad \text{(si la limite existe)}$$

(1) Si $\vec{u}=(1,0)=\vec{i}$,

$$f_{\vec{i}} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\ y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = f_x(x_0,y_0)$$

(2) Si $\vec{u}=(0,1)=\vec{j}$,

$$f_{\vec{j}} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} = f_y(x_0,y_0)$$

Théorème:

Si f une fonction différentiable de x et y, alors f possède une dérivée dans la direction de tout vecteur unitaire $\vec{u}=(a,b)$ et

$$f_{\vec{u}}(x,y) = af_x(x,y) + bf_y(x,y)$$

Définition:

Si f une fonction de 2 variables x et y grad f est la fonction vectorielle.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y)\right)$$

exemple: $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$.

$$\nabla f = (\cos x + y e^{xy}, x e^{xy})$$

exemple: $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$. $\vec{v} = (2,5)$ $f_{\vec{u}}$ en $(2,-1)$?

$$\nabla f = (2xy^3, 3x^2y^2 - 4)$$

$$\nabla f(2,-1) = (-4, 8)$$

Il faut que $\vec{u}$ soit vecteur unitaire,

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,5)$$

$$f_{\vec{u}} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}\right)\cdot(-4,8) = \frac{32}{\sqrt{29}}.$$

exemple: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ $\nabla f = ?$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} 2x_i = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|}$$

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{1}{\|x\|} (x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

Théorème:

Si f est différentiable, la dérivée directionnelle $f_{\vec{u}}(\vec{x})$ est maximale lorsque $\vec{u}$ a la même direction que ∇f. Le taux de notation maximal de f en $\vec{x}$ et $\|\nabla f\|$

Equation du plan tangente de la surface de niveau de F au point (x_0, y_0, z_0)

$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$

Equation paramétrique de la droite normale à la surface de niveau en (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot F_x(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + t \cdot F_y(x_0, y_0, z_0) \\ z = z_0 + t \cdot F_z(x_0, y_0, z_0) \end{cases} \quad (t : \text{paramètre})$$

cas particulier:

$f(x, y) - z = 0.$

$\nabla F(f(x,y), z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = (f_x, f_y, -1).$

plan tangente en (x_0, y_0, z_0)

$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ (le cas pour 2 variables).

exemple: Equation plan tangente et droite normale en $(-2, 1, -3)$ à la surface $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$.

plan tangente:

$\nabla F(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, 2y, \frac{2z}{9}\right)$.

$\nabla F(-2,1,-3) = (-1, 2, -2/3)$

$-1(x-(-2)) + 2(y-1) - 2/3(z-(-3)) = 0$.

$\Rightarrow 3x - 6y + 2z + 8 = 0$.

droite normale:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(-1) & = -2 - t \\ y = y_0 + t(2) & = 1 + 2t \\ z = z_0 + t(-2/3) & = -3 - 2/3\, t. \end{cases}$$

4.5 Approximation de Taylor - Fonctions de 2 variables.

degré 1:

$f(x,y) \approx L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

degré 2:

$f(x,y) \approx Q(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$
$+ 1/2\, f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 1/2\, f_{yy}(a,b)(y-b)^2 +$
$f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)$.

exemple: $f(x,y) = x^2 + xy$. $L(x,y)$ et $Q(x,y)$ en $(1,2)$?

$f(1,2) = 3$, $f_x(1,2) = 4$, $f_y(1,2) = 1$.

$f_{xx}(1,2) = 2$, $f_{yy}(1,2) = 0$.

$f_{xy}(1,2) = 1$.

$L(x,y) = 3 + 4(x-1) + 1.(y-2) = -3 + 4x + y.$

$Q(x,y) = L(x,y) + 1/2 \cdot 2(x-1)^2 + 1/2 \cdot 0 + 1(x-1)(y-2)$

$= x^2 + xy.$

Exercice $f(x,y) = e^x \cos y.$ $L(x,y)$ et $Q(x,y)$ en $(0, \pi/2)$?

$f(0, \pi/2) = 0.$

$fx(x,y) = e^x \cos y.$ $fx(0, \pi/2) = 0.$

$fy(x,y) = -e^x \sin y$ $fy(0, \pi/2) = -1.$

$fxy = -e^x \sin y.$ $fxy(0, \pi/2) = -1.$

$fxx = e^x \cos y.$ $fxx(0, \pi/2) = 0.$

$fyy = -e^x \cos y$ $fyy(0, \pi/2) = 0.$

$L(x,y) = \pi/2 - y.$

$Q(x,y) = L(x,y) + \frac{1}{2} fxx(0, \pi/2)(x-0)^2 + fxy(x-0)(y - \pi/2) +$

$1/2\, fyy(y - \pi/2)^2 = (\pi/2 - y)(1 + x)$