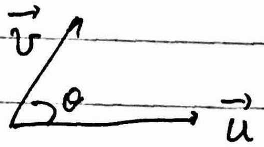
Appendice A – Vecteurs & Matrices.

Annexe B – Droites et plans dans l'espace.

projection :



$$\text{proj}\,\vec{v}_{\vec{u}} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u}$$

$$\|\text{proj}\,\vec{v}_{\vec{u}}\| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|}$$

Produit Vectoriel :

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\qquad$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2u_3 - v_2v_3,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

Formules – Distance.

	point P_2	droite $\Delta 2$ $(P_2, \vec{d_2})$		plan $\pi 2$ $(P_2, \vec{n_2})$
point P_1	$\|\overrightarrow{P_1P_2}\|$	$\dfrac{\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{d_2}\|}{\|\vec{d_2}\|}$		$\dfrac{\vert\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n_2}\vert}{\|\vec{n_2}\|}$ *
droite $\Delta 1$ $(P_1, \vec{d_1})$	X	$\Delta 1 // \Delta 2$ $\dfrac{\|\overrightarrow{P_1P_2}\times\vec{d_2}\|}{\|\vec{d_2}\|}$	$\Delta 1$ $\Delta 2$ gauche $\dfrac{\vert\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{d_1}\times\vec{d_2})\vert}{\|\vec{d_1}\times\vec{d_2}\|}$	$\dfrac{\vert\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n_2}\vert}{\|\vec{n_2}\|}$
plan $\pi 1$ $(P_1, \vec{n_1})$	X	X		$\dfrac{\vert\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n_2}\vert}{\|\vec{n_2}\|}$ **

*: $P(x_0, y_0, z_0)$ $\quad$ π: $ax+by+cz+d=0$. $\quad$ distance $= \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

** $\pi_1 : ax + by + cz + d = 0.$
$\pi_2 : ax + by + cz + e = 0.$

$$\text{distance} = \frac{|-d+e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

angle entre 2 plans :

$$\cos\theta = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\|} \qquad |\sin\theta| = \frac{\|\vec{n_1} \times \vec{n_2}\|}{\|\vec{n_1}\| \cdot \|\vec{n_2}\|}$$

Chapitre III : Fonctions de plusieurs variables.

3.1 Introduction.

Fonction de 2 variables.

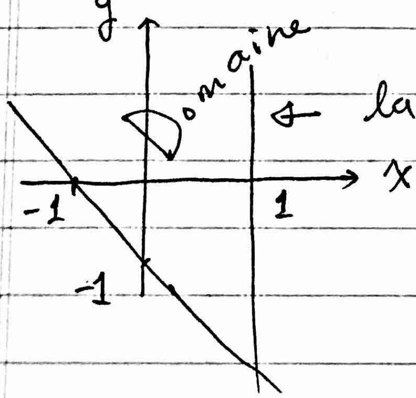
définition : Règle ou Assigne à chaque couple de réels $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ un réel unique noté $f(x,y) \in \mathbb{R}$.

D : domaine de f.

l'image de f : $\{ f(x,y) \mid (x,y) \in D \}$.

exemple : $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ domaine de f ?

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 \neq 0. \\ x + y - 1 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \neq 1 \\ x + y \geq -1 \end{array}$$

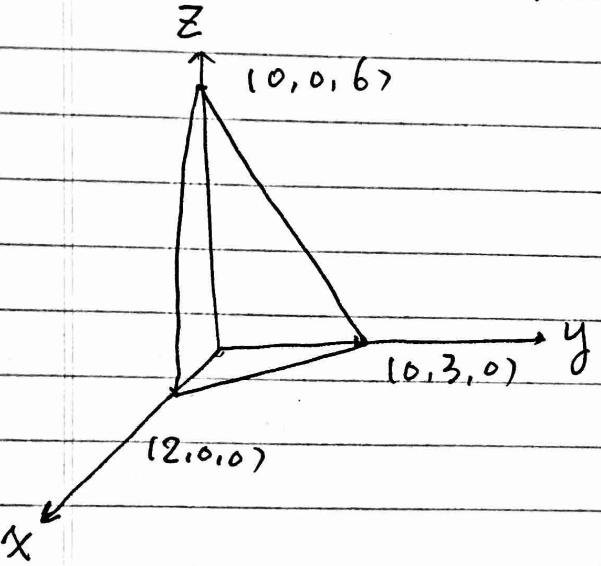


← la droite $x = 1$ est exclue.

exemple : $f(x,y) = 6-3x-2y$. $D=\mathbb{R}^2$.

graphe $z = 6-3x-2y$. (équation d'un plan).

Pour dessiner un plan, il faut trouver 3 points.



Courbe de niveau :

Définition : une courbe de niveau d'une fonction $f(x,y)$ sont les courbes d'équation $f(x,y)=k$, $k\in\mathbb{R}$

Donc le courbe de niveau $k = \{(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=k\}$.

exemple : Trouver les courbes de niveau.

$g(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

domaine : $9-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 9$.

courbe de niveau $k = \{(x,y)\in D \mid \sqrt{9-x^2-y^2}=k\}$.

courbe de niveau est non vide ssi $k\geq 0$.

$9-x^2-y^2 = k^2$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 9-k^2$. $\Leftrightarrow k^2\leq 9$.

$\Leftrightarrow$ la courbe de niveau est non vide ssi $k^2\leq 9 \Leftrightarrow k\leq 3$.

(1) Si $k \notin [0,3] \Rightarrow$ la courbe est ~~...~~ vide.
(2) Si $k \in [0,3] \Rightarrow$ la courbe est un cercle de rayon $\sqrt{9-k^2}$

Fonction de 3 variables $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

exemple: Trouver le domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ de $f(x,y,z) = \ln(z-y) + xy \sin z$.

$z-y > 0 \Leftrightarrow \underline{z > y}$.

exemple: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

la courbe de niveau k: l'ensemble de points $(x,y,z) \mid x^2+z^2+y^2 = k$.

On va regarder uniquement $k \geq 0$.

Sphère du centre $(0,0,0)$ rayon $\sqrt{k}$.

Notion Vectorielle.

$\mathbb{R}^n : \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\vec{x})$

3.2. Limite et Continuité.

Fonction de 2 variables.

Définition: Soit $f(x,y)$ de domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, on dit que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \quad \text{si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \text{si } (x,y) \in D \text{ et } 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$$

alors $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

exemple : quand la limite n'existe pas

Stratégie :

Si $f(x,y) \to L_1$ lorsque $(x,y) \to (a,b)$ le long d'un chemin C_1 (ex : $y=0$) et

Si $f(x,y) \to L_2$ lorsque $(x,y) \to (a,b)$ le long d'un chemin C_2 (ex : $x=0$) $\underline{(L_1 \neq L_2)}$

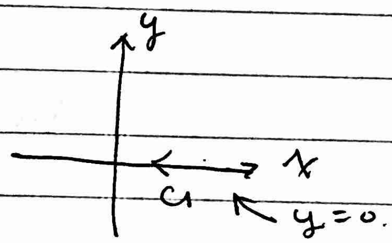
alors $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ n'existe pas.

exemple. Étudions la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

$D = \{\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}\}$

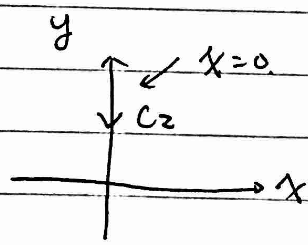
1) C_1 : $y=0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$



2) C_2 : $x=0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$



$1 \neq -1$, donc la limite n'existe pas.

exemple : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

(1) le long de C_1 : $\underline{y=0}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0.$

(2) le long de C_2 : $x=0$ $\qquad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0.$

(3) le long de C_3 : $x=y$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y=x}} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2} \neq 0.$

$\Rightarrow$ la limite n'existe pas.

exemple : $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

Domaine $= \{\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)\}$.

$C_1 : y=0 \quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = 0.$

$C_2 : x=0 \quad \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^4} = 0.$

$C_3 : y=kx \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{x\cdot(kx)^2}{x^2+(kx)^4} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \dfrac{x\cdot k^2}{1+k^4x^2} = 0.$

$C_4 : x=y^2 \quad \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=y^2}} \dfrac{y^2\cdot y^2}{(y^2)^2+y^4} = \dfrac{1}{2} \neq 0.$

la limite n'existe pas.

Cas simples : Calcul de limites.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b.$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Règles Habituelles. (si les limites de $f(x)$ et $g(x)$ existent)

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y)+g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x).$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\cdot g(x,y) = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim f(x,y)}{\lim g(x,y)} \quad (\lim g(x) \neq 0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(g(x,y), h(x,y)) = f(\lim g, \lim h).$$

exemple: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2\cos y}{x^2+y^2}.$ domaine: $\underline{\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)}$

$(1,1) \in D.$

$$= \frac{\lim_{x\to1} x^2 \cdot \lim_{y\to1} \cos y}{\lim_{x\to1} x^2 + \lim_{y\to1} y^2} = \frac{\cos 1}{2}.$$

exemple: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$

Le long du chemin : $y=kx.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \frac{3x^2x}{(1+k^2)x^2} = \frac{3x}{1+k^2} = 0.$$

Conclusion:

(1) Pour toute droite $y=kx$, on trouve la même limite

Peut-être la limite existe.

(2) Si la limite existe, limite $=0$.

Essayons de démontrer que la limite $L=0$.

Première façon : en utilisant la définition ε-δ.

On choisit $\varepsilon>0$, on veut trouver $\delta>0$ tel que si $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$

alors $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}-L\right|<\varepsilon$.

(Ici $a=0$, $b=0$.)

dem. On a $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = 3\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right||y| \leq 3|y|$.

($\because$ $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \in [0,1]$)

Donc si l'on trouve δ tel que $3|y|<\varepsilon$, la limite sera démontrée,

parce que $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 3|y| < \varepsilon$.

$3|y| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta$

On prend $3\delta=\varepsilon$, $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$.

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} = 0$.

Deuxième façon (Normalement on utilise la $2^{\text{ème}}$ façon).

Théorème du sandwich.

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y)$.

et $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$.

alors $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L$.

Application:

Si on veut démontrer que $\lim g(x,y) = L$,

on va démontrer que $\lim |g(x,y) - L| = 0$.

Ici, on veut démontrer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{3x^2y - 0}{x^2+y^2} - 0 \right| = 0.$$ Il faut trouver

$f(x) \leq \left| \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq h(x)$, avec lim de $f(x)$ =

lim de $h(x) = 0$.

$$\underbrace{0}_{f(x)} \leq \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| \leq \underbrace{3|y|}_{h(x)}$$

Continuité:

Définition: $f(x,y)$ est continue en (a,b) ssi
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

$f(x,y)$ est continue dans $D \subset \mathbb{R}^2$ ssi
$f(x,y)$ continue pour $\forall (x,y) \in D$.

exemple:
$$f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y.$$
domaine de définition: $\mathbb{R}^2$.
domaine de continuité: $\mathbb{R}^2$.

exemple:
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

domaine de définition: $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
domaine de continuité: $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

exemple:
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

domaine de définition: $\mathbb{R}^2$
domaine de continuité: $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
vérifie si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0$.

chemin $x=0$. $\lim \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$.

chemin $y=0$ $\lim \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

$\Rightarrow$ la limite n'existe pas. $\Rightarrow$ pas continue en $(0,0)$.

exemple: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ k. & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(1) D de définition : $\mathbb{R}^2$.

(2) D de continuité

On a déjà prouvé que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Donc $f(x,y)$ continue en $(0,0)$ ssi $k=0$.

Fonction de 3 variables et plus.

exemple: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+xz^2+yz^2}{x^2+y^2+z^4}$

Approches dans 3 plans:

(1) par le plan $x=0$,

$\lim\limits_{(y,z)\to(0,0)} \dfrac{yz^2}{y^2+z^4}$

(2) par le plan $y=0$.

(3) par le plan $z=0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

chemin 1: $x=0$. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{\cancel{x}y^2} = 0$

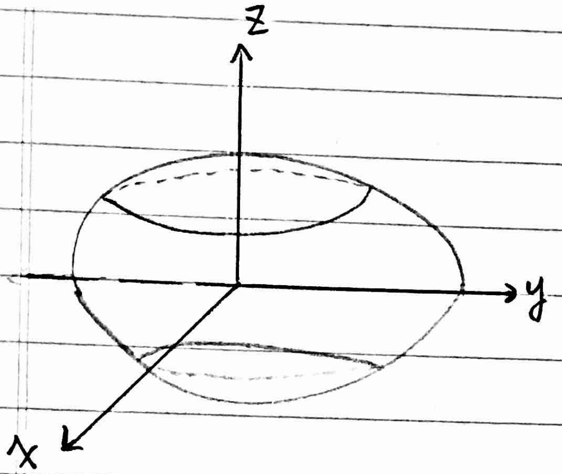
chemin 2: $y=0$. $\lim = 0$.

chemin 3: $x=y$. $\lim = 1/2$

$\therefore \lim \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas $\Rightarrow \lim \dfrac{xy+xz^2+yz^2}{x^2+y^2+z^4}$ n'existe pas

3.3. Cylindres et Surfaces quadratiques.

ellipsoïde

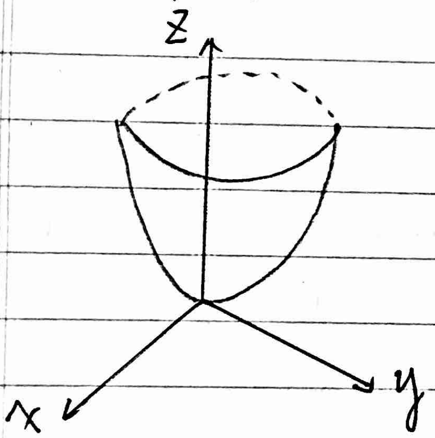


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Toutes les traces sonts des ellipses.

Si $a=b=c$, c'est une sphère.

Paraboloïde elliptique.



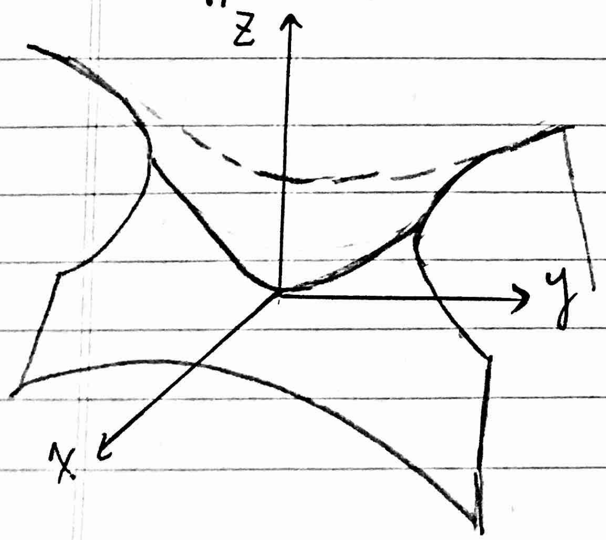
$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Les traces horizontables sont des ellipses.

Les traces verticales sont des paraboles

La variable élevée à la première puissance donne l'axe du paraboloïde.

paraboloïde hyperbolique.

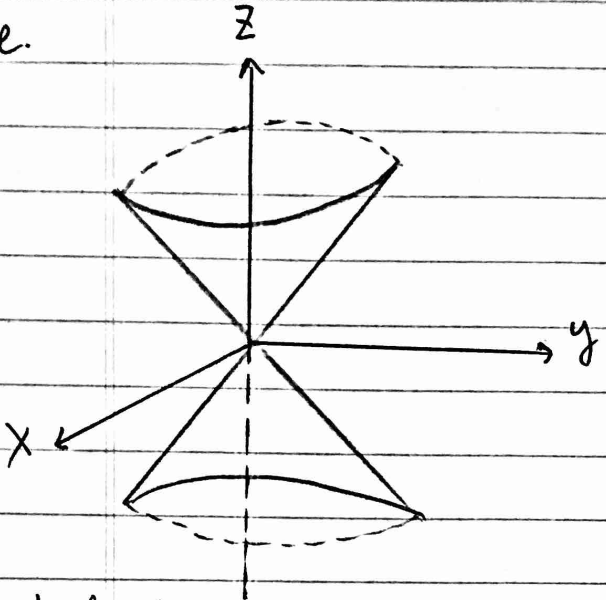


$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Les traces horizontales sont des hyperboles.

Les traces verticales sont des paraboles.

Cône.

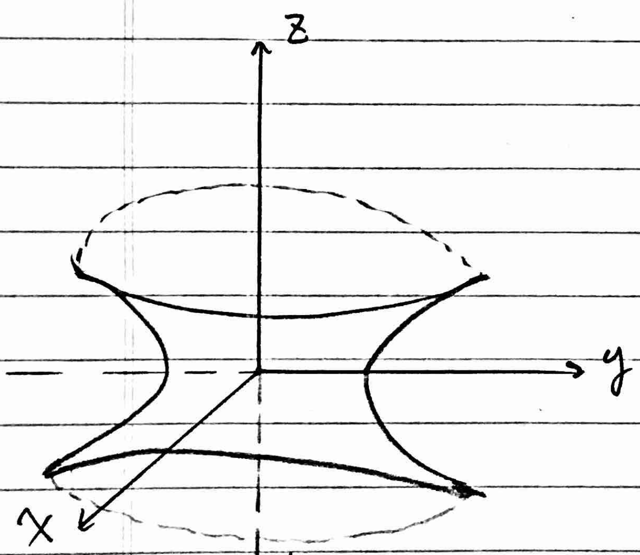


$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Les traces horizontales sont des ellipses.
Les traces verticales dans les plans $x=k$ et $y=k$ sont des hyperboles si $k \neq 0$.
et des paires de droites si $k=0$.

Hyperboloïde à une nappe.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Hyperboloïde à deux nappes.

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$