Chapitre 2: Série de Taylor.

2.1. Les séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

x: variable, c_n: constante donnée (coefficient de la série)

exemple:
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Série géométrique avec raison $= x$.
la série converge ssi $|x| < 1$.

$$\Sigma = \frac{1}{1-x}.$$

exemple:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

Série entière en $(x-a)$, centrée en a.

Note: (1) $(x-a)^0 = 1$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0$ (si $x = a$) convergente.

exemple: Pour quelle valeur de x, la série suivante converge?

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ $\qquad |a_n| = n!\,|x|^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| \to \infty$$

(sauf $x=0$).

Conclusion: $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ diverge pour $\forall x$ (sauf $x=0$).

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ $\qquad a_n = \frac{(x-3)^n}{n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-3|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x-3|^n} = |x-3| \cdot \frac{n}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} |x-3| \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} |x-3| \frac{1}{1+1/n} = |x-3| = L.$$

i) $|x-3|>1$, la série diverge.

$\iff x-3>1$ ou $x-3<-1$. $\iff x>4$ ou $x<2$.

ii) $|x-3|<1$, la série converge.

$\iff x-3<1$ et $x-3>-1$, $\iff 2<x<4$.

iii) $|x-3|=1$. $\iff x=4$ ou $x=2$.

a) $x=2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. converge.

b) $x=4$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

En conclusion, la série converge sur $[2,4[$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)\, x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ $\qquad a_n = \frac{(-1)\, x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$

$$|a_n| = \frac{|x|^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(x^2)^n}{4^n (n!)^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(x^2)^{n+1}}\ x^2}{\underset{4}{\cancel{4^{n+1}}}\underset{(n+1)^2}{\cancel{((n+1)!)^2}}} \cdot \frac{4^n (n!)^2}{(x^2)^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{4(n+1)^2} = 0.$$

Conclusion: la série converge pour $\forall x$.

Résumé: $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = f(x)$ si $x \in$ intervalle de convergence.

Intervalle de convergence $|x-a| < R$.

donc $-R < x-a < R. \iff a-R < x < R+a$.

si $R=0$, la série converge uniquement en $x=a$.

si $R \to \infty$, la série Converge pour tout x.

4 situation: $[a-R, a+R]$.

$]a-R, a+R[$

$[a-R, a+R[$.

$]a-R, a+R[$.

exemple: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ $\quad a_n = \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}|x+2| \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}|x+2|.$$

Il faut $\frac{1}{3}|x+2| < 1$ pour que la série converge.

$\iff |x+2| < 3$. (3 est l'intervalle de convergence)

$\iff x+2 < 3$ et $x-2 > -3$

$\iff -5 < x < 1$. $\Rightarrow$ Converge.

Quand $x > 1$ ou $x < -5$, la série diverge.

Si $x=-5$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \cdot n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n \cdot n}{3^n \cdot 3}$.

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{3}$. Diverge.

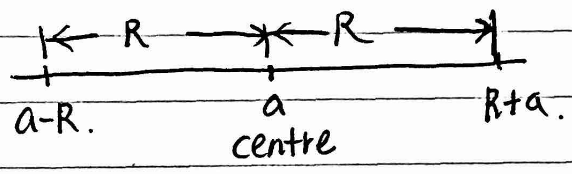
Si $x = 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3}$. Diverge.

Résumé 2.1.

Série entière: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = f(x)$

Si $\sum C_n (x-a)^n$ converge, on appelle la somme $f(x)$, cette somme dépend de x.

Intervalle de convergence $|x-a| < R$.



Typiquement, on utilise le test du rapport pour la convergence absolue. Il faut tester aussi aux extrêmités.

2.2. Développement de $f(x)$ en série entière.

exemple:

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ série géométrique de raison x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{ssi } |x| < 1.$$

Si $|x| < 1$, Σ converge.

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + (x-0)^1 + (x-0)^2 + \cdots$ est une série entière avec $a = 0$. Intervalle de convergence : $]-1, 1[$.

Application : Série de $\dfrac{1}{1+x^2}$ $(a=0)$.

on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

$\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)}$ on remplace x par $-x^2$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (r = -x^2).$$

Intervalle de convergence: $|-x^2| < 1 \iff -1 < x < 1$.

Autre Application: Série entière avec $a=0$.

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} \right).$$

$$= x^3 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} \right) = \frac{x^3}{2} \cdot \frac{1}{\underbrace{1-(-\frac{x}{2})}} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \right)$$

remplace x par $-\frac{x}{2}$.

$$= \frac{x^3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x^3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{2^{n+1}}$$

posons $n+3 = m$, $n+1 = m-2$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{2^{n+1}} = \sum_{m=3}^{\infty} (-1)^{m-3} \frac{x^m}{2^{m-2}} = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^m}{2^{m-2}}$$

Ianl: Série géométrique avec $r = \left(\frac{x}{2}\right)$

$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow$ la série converge. $\iff -2 < x < 2$.

exemple : Série de $\ln|1-x|$

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right).$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \int x^n dx + c\right).$$

$$= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right).$$

$$= -\left(c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right).$$

$$\Rightarrow \ln|1-x| = -c - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

pour $x=0$, $\ln 1 = -c-0 \Rightarrow c=0$.

Donc $\ln|1-x| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

exemple : $\arctan x$. $\left(\text{on a } (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\right)$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots$$

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots)\,dx.$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

posons $x=0$, $\arctan 0 = c \Rightarrow c = 0$.

$$\Rightarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

2.3. Série de Taylor et de Mclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n.$$

(1) Si $x = a$, $f(a) = C_0$

(2) Dans l'intervalle de convergence,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, C_n (x-a)^{n-1}.$$

$n=1$, $f'(a) = 1 \cdot C_1 \cdot (x-a)^{1-1} = C_1.$

(3) $$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, C_n (x-a)^{n-2}.$$

$f''(a) = n(n-1)\, C_n \cdot 0^{n-2}$ quand $n=2$, $f''(a) = 2C_2.$

$\Rightarrow C_2 = \frac{f''(a)}{2}$

- La Derivation / l'intégration des séries entières.

Rappel: la dérivée / l'intégrale d'une somme de fonction = somme des dérivés / des intégrales.

Théorème:

Si $\sum C_n (x-a)^n$ avec un rayon de convergence $R > 0$.
alors $f(x)$ défini par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$

est dérivable (donc continue) sur $]a-R, a+R[$

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n.$$

$$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)\,dx = C + C_0(x-a) + \frac{C_1(x-a)^2}{2} + \frac{C_2(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

exemple : série avec $a=0$ $\quad \frac{1}{(1-x)^2}$

Rappel : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -1 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \, (1-x)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$ posons $m = n-1$, ~~m =~~ $n = m+1$.

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \cdot x^m \quad (m \to n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$ raison x. Rayon de convergence $= 1$.

l'intervalle de convergence : $]-1, 1[$.

On déduit Série de Taylor autour de a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

Si $a=0$, on a la série de McLaurin.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\underbrace{(x-0)}_{x} + \frac{f''(0)}{2!}\underbrace{(x-0)^2}_{x^2} + \cdots$$

exemple : La série de Taylor autour de 0 de e^x.

$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad \dots \quad f^n(x) = e^x$.

$f^n(0) = e^0 = 1$.

Rappel : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)\, x^n}{n!}$

Donc $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Pour savoir l'intervalle de convergence :

Test du rapport :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0.$$

(pour $\forall x$) < 1. $\Rightarrow$ La série converge pour $\forall x$.

exemple : La série de Taylor autour de 0 de $\cos x$.

$f(x) = \cos x$. $\qquad f(0) = 1$ $\qquad f^{2n}(0) = (-1)^n$

$f'(x) = -\sin x$. $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad f''(0) = -1$ $\Rightarrow$ $f^{2n+1}(0) = 0$.

$f^3(x) = \sin x$. $\qquad f^3(0) = 0$

$f^4(x) = \cos x$ $\qquad f^4(0) = 1$

$f^5(x) = -\sin x$ $\qquad f^5(0) = 0$

$\vdots \qquad \vdots$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0 \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{0.}$$

$$\Rightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Test du rapport:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0. \quad \text{pour } \forall x < 1$$

Conclusion: la série converge pour $\forall x$.

Série binomiale.

$f(x) = (1+x)^k$ (k : réel quelconque)

$f(x) = (1+x)^k$ $\quad f(0) = 1.$

$f'(x) = k(1+x)^{k-1}$ $\quad f'(0) = k.$

$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2}$ $\quad f''(0) = k(k-1)$

$\vdots$

$f^n(x) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n}$

$f^n(0) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$$

on a $\binom{k}{n} = \dfrac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n.$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-(n+1)+1)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}}{\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}\,x^n}\right| = \frac{|x|\cdot|k-n|}{n+1}.$$

$$= |x|\cdot\frac{\left|\frac{k}{n}-1\right|}{1+\frac{1}{n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\cdot\frac{\overbrace{\left|\frac{k}{n}-1\right|}^{\to |1|}}{\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to |1|}} = |x|$$

Quand $|x|<1$, la série converge.
Quand $|x|>1$, la série diverge.

Résumé:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\cdots \qquad R=1.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad R=\infty.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad R=\infty.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad R=\infty$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad R=1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad R=1.$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n \qquad R=1.$$

Multiplication et diviser deux séries :

exemple : série de McLaurin de $f(x) = e^x \sin x$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

multiplication :

$$\begin{array}{rl} & 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \\ \times & x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots \\ \hline & x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \cdots \\ & - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{36} \cdots \\ & \vdots \\ \hline = & x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \cdots \end{array}$$

exemple : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \cline{2-2} - \; x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} & \underbrace{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots}_{\tan x} \\ \cline{1-1} \frac{x^3}{3} - \frac{1}{30}x^5 + \cdots & \\ - \; \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \cdots & \\ \cline{1-1} \cdots & \end{array}$$