Chapitre I :

I. Suites et Séries.

1.1.

Définition 1 : La suite converge.

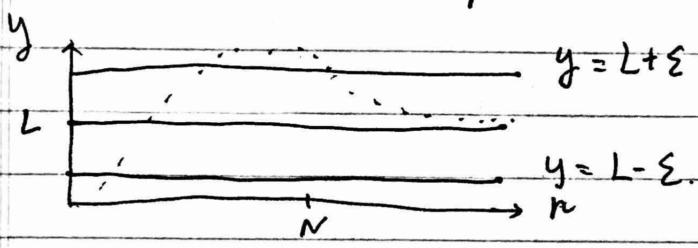
La suite $\{a_n\}$ admet la limite L

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \quad (a_n \to L, \ n \to \infty)$$

Si la limite existe, on dit que la suite converge.

Définition 2 :

La suite $\{a_n\}$ a pour limite L si et seulement si $\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ N$ (dépendant de ε) $\mid \forall \ n > N, \ |a_n - L| < \varepsilon$.



Théorème : Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ et si $f(n) = a_n$ (continue et positif)

alors $\lim_{n \to +\infty} a_n = L$.

ex : $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x^r} \ (r > 0)$ $\quad a_n = \frac{1}{n^r}$ tend vers 0.

démonstration : $\lim_{n \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = \lim_{n \to \infty} e^{-r \ln x} \to 0$.

Définition : $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ signifie $\forall$ nombre positif M

à partir du N $\mid \forall \ \overset{n}{\cancel{AA}} > N$, $a_n > M$.

Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ convergent, c constante :

(1) $\lim_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\lim_{n\to\infty} (a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$.

(3) $\lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot \lim_{n\to\infty} a_n$.

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ (si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$)

(6) $\lim_{n\to\infty} a_n^p = [\lim_{n\to\infty} a_n]^p$ (si $p>0$ et $a_n>0$)

Théorème du Sandwich:

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$, et $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, alors $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Théorème: Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Théorème: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ et si f est continue en L,

alors $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$

ex: $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) = \sin 0 = 0$.

Suite bornée:

La suite $\{a_n\}$ est bornée supérieurement,
si $\exists\ M \mid a_n \leq M$ pour $\forall\ n \geq 1$.
La suite $\{a_n\}$ est bornée inférieurement,
si $\exists\ m \mid a_n \leq m$, pour $\forall\ n \geq 1$.
Si $\{a_n\}$ est bornée supérieurement et inférieurement,
on dit que $\{a_n\}$ est bornée.

- bornée n'implique pas convergent
- bornée et monotone $\Rightarrow$ convergent.

- bornée ~~et~~ supérieurement et montone croissant $\Rightarrow$ convergent
- bornée inférieurement et monotone décroissant $\Rightarrow$ convergent.

ex:

$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$.

(1) monotone croissant ?

Supposons $a_{n+1} \geq a_n$. Il faut démontrer $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

$a_{n+2} \geq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_{n+1}+6) \geq \frac{1}{2}(a_n+6)$

$\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$

(2) Supposons $a_n \leq 6 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(a_n+6)}_{a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(6+6)$

$\Leftrightarrow a_{n+1} \leq 6$, qui est vrai pour $\forall\ n$.

$\Rightarrow \{a_n\}$ Converge.

Quelle est la limite de $\{a_n\}$?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n+6) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(L+6)$$

$$\Rightarrow L = 6.$$

Les séries : une somme infinie de tous les suites.

La suite partielle $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Définition : Soit la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$

et Soit S_n la nième Somme partielle $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Si la suite ~~$\{S_n\}$~~ $\{S_n\}$ converge,

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

$S = \lim_{n\to\infty} \{S_n\}$ et $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, S : somme de la série.

1. Série géométrique.

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad (a \neq 0).$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

- Si $r = 1$, $S_n = a \cdot n$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, la série diverge.
- $S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$. ①

$r \cdot S_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n$ ②.

① - ②, $(1-r) S_n = a - ar^n$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1).$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} (1-r^n)$$

- $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$.
- $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ si $|r| > 1$.

Conclusion : $|r| < 1$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ (si $|r| < 1$)

La série géométrique est convergente ssi r est telle que $|r| < 1$ et la somme vaut $\frac{a}{1-r}$.
Si $|r| \geq 1$, la série diverge.

2. La série harmonique.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}.$$

$$S_4 = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) > 1 + 1/2 + (1/4 + 1/4) = 1 + 2/2.$$

$$\vdots$$

$$S_{2^i} > 1 + i/2.$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n > \left(1 + i/2\right) \text{ quand } i \to \infty.$$

Donc. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

1.2.

(1) Séries téléscopiques :
Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1. \Rightarrow \text{Série converge.}$$

Théorème: Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Contraposé ?

$\Rightarrow$ Si la limite $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. (Test de la divergence)

1.3. Série à ~~termes~~ termes positifs

exemple 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Test de l'intégrale.

i) $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx \leq$

$1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 2.$

$S_n \leq 2.$ $\Rightarrow$ S_n est bornée supérieurement.

ii) $S_{n+1} \geq S_n$ (pcq $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} \geq S_n$).

$\Rightarrow$ S_n est monotone croissant.

$\Rightarrow$ la suite $\{S_n\}$ converge.

exemple 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$

$= 2\sqrt{x}\Big|_1^{n+1} = 2\sqrt{n+1} \cancel{+} -2 \Rightarrow S_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2.$

$\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n+1} - 2 \to \infty \Rightarrow S_n$ diverge.

Test de l'intégrale.

(1) uniquement pour les termes positifs.

(2) $f(x)$ continue, positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ et $a_n = f(n)$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si

$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Marche à suivre: on calcule $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$,

si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Note:

On n'est pas obligé de commence à $x=1$.

$\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ converge.

application importante: Série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

i) Test de la divergence:

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \Leftrightarrow p > 0.$

Quand $p \le 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$.

ii) Test de l'intégrale:

Si $p > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^p}$ continue, sur $[1, +\infty[$,

$f(x)$ est décroissante et positive.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^\infty \quad (\text{si } p \neq 1).$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p}.$$

- si $1-p > 0$ $(p<1)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}$ diverge.
- si $1-p < 0$ $(p>1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}$ converge.
- si $p=1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est une série harmonique. $\Rightarrow$ Diverge.

Conclusion : la série de Riemann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p>1$, diverge si $p \leq 1$.

Test de comparaison :

exemple : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ $\left(\frac{1}{2^n+1} \text{ ressemble à } \frac{1}{2^n}\right)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (pcq c'est une série géométrique avec $r=2$).

on a $\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ pour $\forall\, n$, $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n+1} \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \leq$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ (somme complète) $= S_g$.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n+1} \leq S_g \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n+1}$ est bornée supérieurement.

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n+1}$ est aussi monotone croissant.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ est convergent.

Test de comparaison:

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries à termes positifs

a) Si $\sum b_n$ converge, et $a_n \leq b_n$ pour $\forall n$, alors $\sum a_n$ converge aussi.

b) Si $\sum b_n$ diverge, $a_n \geq b_n$ pour $\forall n$, alors $\sum a_n$ diverge aussi.

exemple:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$. $\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} \overset{R.H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

(avec la test de la divergence, on peut rien conclure).

Test de comparaison:

$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ avec $n \geq e$ ($n \geq 3$).

Vu que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge aussi.

Test de comparaison à la limite:

Supposons que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries à termes positifs si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

(où c est une constante non nulle et $c>0$)

alors les 2 séries convergent ou
les 2 séries divergent.

Exemple: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}. \qquad \sum b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n-1} \cdot 2^n = 1.$$

puisque $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge.

Conclusion: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge.

1.4 Séries alternées.

exemple: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \cdots$

(1) $b_n = \frac{1}{n!}$, b_n est décroissante.

($\because b_{n+1} \leq b_n$).

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Ces 2 conditions sont satisfaites.

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge.

1.5 convergence absolue.

$\sum a_n \to$ convergence simple.

$\sum |a_n| \to$ convergence absolue.

définition: $\sum a_n$ converge absoluement ssi $\sum |a_n|$ converge.

Si ~~[illegible]~~ $\sum a_n$ converge mais $\sum |a_n|$ diverge, alors la convergence de $\sum a_n$ est simple.

Si $\sum a_n$ converge absoluement, alors $\sum a_n$ converge simplement.

exemple: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$: série à termes positifs

on a $\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

$\because \sum \frac{1}{n^2}$ converge (pcq $\frac{1}{n^2}$ série de Riemann avec $p=2$)

par la test de comparaison, $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ converge.

$\Rightarrow \sum \frac{\cos n}{n^2}$ converge absoluement.

$\Rightarrow \sum \frac{\cos n}{n^2}$ converge.

Test du Rapport:

calculer $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$

Si $L < 1$, Σa_n converge absolument.

Si $L > 1$, pas de convergence absolue ni de convergence simple.

Si $L = 1$, Inconclusif.

exemple: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}.$

$$|a_n| = \left|(-1)^n \frac{n^3}{3^n}\right| = \frac{n^3}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} =$$

$$\frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} < 1.$$

$\Rightarrow \Sigma |a_n|$ converge $\Rightarrow \Sigma a_n$ converge.

Test de Racine.

calculer $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$

① Si $L > 1$, Σa_n diverge.

② Si $L < 1$, Σa_n converge.

③ $L = 1$, inconclusif.

exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ converge.

Réarrangement (changer l'ordre des termes d'une série).

Théorème : Si Σa_n converge absolument avec la somme S, alors tout arrangement de Σa_n est à la même somme S.

1.6.

(1) Série de Riemann ? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$.

(2) Série géométrique ? $\Sigma a r^{n-1}$, $\Sigma a r^n$ ... converge avec $|r| < 1$.

(3) Test de comparaison, Test de comparaison à forme limite.

(4) Test de la divergence :

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, $\Rightarrow$ diverge.

(Mais si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, inconclusif).

(5) Séries alternées ? – b_n décroissant.

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

(6) a_n contient $n!$? $\Rightarrow$ test du rapport.

(7) a_n contient $(b_n)^n$? $\Rightarrow$ test du Racine.

(8) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ avec $a_n = f(n)$ est facile à calculer ?

exemple:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{1+n\sqrt{n}} \qquad a_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{1+n\sqrt{n}}$$

$$\forall\ |a_n| = \frac{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|}{1+n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{1+n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

$$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^1 \cdot n^{1/2}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$$ Série de Riemann

avec $p > 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge.

$\Rightarrow \sum |a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ Converge.